

微分 と 導関数-基本演習

differentiation derivative

→ [講義 微分法の基本](#) [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分法の基本-講義/>

→ [講義 微分公式と計算法](#) [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分公式と計算法-講義/>

1 演習方針

導関数は、差商の極限であり、局所線型近似の係数である。微分公式を使用するときは、どの構造に対する公式かを確認する。

2 問題 1

定義から $f(x) = x^2$ の導関数を求めよ。

2.1 解答例

Correct

導関数の定義より、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

である。 $h \neq 0$ の範囲で

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

である。ここでは h で割るため、 $h \neq 0$ を確認する。したがって

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

である。

2.2 解説

この問題は、微分が瞬間の変化率を極限として定義することを確認している。公式を使う前に、差商がどのように傾きへ近づくかを把握することが重要である。

2.3 よくある誤り

$h = 0$ を途中で代入して $0/0$ にしてしまう誤りがある。差商では、まず $h \neq 0$ で式を整理し、その後で $h \rightarrow 0$ の極限を取る。

3 問題 2

$f(x) = \sqrt{x}$ について、 $x = 4$ における局所線型近似きょくしよせんけいきんじを用いて $\sqrt{4.1}$ を近似きんじせよ。
local linear approximation

3.1 解答例

Correct

$f(4) = 2$ であり、

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

なので $f'(4) = 1/4$ である。したがって $x = 4$ の近くちかで

$$f(x) \approx f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

である。 $x = 4.1$ を代入だいにゆうして

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0.1 = 2.025$$

を得える。

3.2 解説

局所線型近似きょくしよせんけいきんじは、曲線を接線せつせんで置き換える見方である。変わるのは関数そのものではなく、近くちかで扱う近似式きんじしきである。保存されるのは、基準点きんじゆんてんでの値あたいと傾きかたむである。

3.3 よくある誤り

局所線型近似きょくしよせんけいきんじを遠い点へ無条件むじょうけんに使う誤りあやまがある。基準点きんじゆんてんから離れるほど、高次こうじの項こうの影響えいきょうが大きくなる。

4 問題 3

$f(x) = x^2 \sin x$ の導関数どうかんすうを求めよ。
derivative

4.1 解答例

Correct

f は x^2 と $\sin x$ の積せきであるため、積せきの微分公式びぶんこうしきを使用する。
product rule

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

である。

4.2 解説

積の微分公式は、一方だけを微分すればよいという規則ではない。積の両方が変化するため、 $f'g + fg'$ の2項が必要になる。

4.3 よくある誤り

$(x^2 \sin x)' = 2x \cos x$ としてしまう誤りがある。これは2つの因子を同時に微分してしまう公式適用ミスである。

5 問題 4

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

の導関数を求めよ。

5.1 解答例

Correct

g の定義域は $x \neq 1$ である。商の微分公式を使用すると、

$$g'(x) = \frac{(x-1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

である。分母に $(x-1)^2$ があるため、 $x \neq 1$ の範囲で成立する。

5.2 解説

商の微分公式では、分母が0でない範囲を先に確認する。この問題では $x=1$ で関数そのものが定義されないため、導関数も $x=1$ では扱わない。

5.3 よくある誤り

分子と分母を別々に微分して $1/1$ とする誤りがある。商の微分公式は、分子と分母の変化が同時に効くことを補正する公式である。

6 問題 5

$f(x) = |x|$ が $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

6.1 解答例

Correct

右側からの差商は

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

である。一方、左側からは

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

である。左右の極限が一致しないため、 f は $x = 0$ で微分可能ではない。

6.2 解説

連続であっても微分可能とは限らない。 $|x|$ は 0 で折れ曲がるため、接線の傾きが左右で一致しない。

6.3 よくある誤り

$|0| = 0$ だから微分可能だと判断する誤りがある。微分可能性は点の値だけでなく、周辺からの近づき方で決まる。

7 関連講義

→ 講義 微分法の基本 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分法の基本-講義/>

→ 講義 微分公式と計算法 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分公式と計算法-講義/>

→ 講義 線型性の基本 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/>