

微分積分の応用と発展- 標準演習

calculus

→ 講義 微分積分の応用 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分の応用-講義/>

→ 講義 偏微分と重積分 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/偏微分と重積分-講義/>

→ 講義 微分方程式の入口 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分方程式の入口-講義/>

1 演習方針

微分は局所変化を読む道具であり、積分は累積量を読む道具である。応用では、まず必要なのが局所情報か、全体の累積かを判定する。

2 問題 1

$f(x) = x^3 - 3x$ の増減と極値を調べよ。

2.1 解答例

Correct

まず

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

である。したがって $f'(x) = 0$ となる点は $x = -1, 1$ である。符号を確認すると、 $f'(x) > 0$ は $x < -1$ と $x > 1$ 、 $f'(x) < 0$ は $-1 < x < 1$ である。よって $x = -1$ で極大、 $x = 1$ で極小を取る。

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2$$

である。

2.2 解説

導関数の符号は、関数の増減を表す。変わるものは関数値であり、確認しているものは接線の傾きである。停留点では符号の変化まで確認する。

2.3 よくある誤り

$f'(x) = 0$ だけで極値と判断する誤りがある。極値には前後の増減の変化が必要である。

3 問題 2

速度 $v(t) = t - 1$ で $0 \leq t \leq 3$ を運動する点について、変位と移動距離を求めよ。

3.1 解答例

Correct

変位は速度の符号付き積分なので、

$$\int_0^3 (t-1) dt = \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

である。移動距離では速さ $|v(t)|$ を積分する。 $v(t) = 0$ は $t = 1$ なので、

$$\int_0^3 |t-1| dt = \int_0^1 (1-t) dt + \int_1^3 (t-1) dt = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

である。

3.2 解説

変位は向きを含む累積量であり、移動距離は向きを消した累積量である。ここでは $v(t)$ の符号が変わる時刻を境界として分割する。

3.3 よくある誤り

変位と移動距離を同一視する誤りがある。速度が負になる区間があると、両者は一致しない。

4 問題 3

$f(x) = x^2$ の $[0, 2]$ における平均値を求めよ。

4.1 解答例

Correct

平均値は

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

である。したがって

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

である。

4.2 解説

平均値は、面積を区間長で割った高さである。ここで $b-a$ で割っているため、区間の長さが 0 でないこと、すなわち $a \neq b$ が必要である。

4.3 よくある誤り

$\int_a^b f(x) dx$ をそのまま平均値とする誤りがある。定積分は累積量であり、平均値ではない。

5 問題 4

$f(x, y) = x^2y + \sin y$ について、 f_x 、 f_y を求めよ。また、

$$\int_0^1 \int_0^2 xy \, dx \, dy$$

を計算せよ。

5.1 解答例

Correct

偏微分では、一方の変数を固定する。したがって

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 + \cos y$$

である。つぎに

$$\int_0^1 \int_0^2 xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_0^2 dy = \int_0^1 2y \, dy = 1$$

である。

5.2 解説

偏微分は方向を固定した局所変化である。重積分は領域の薄片の寄与を累積する操作である。この問題は、多変数で局所と累積を分離する練習である。

5.3 よくある誤り

f_x を求めるときに y も同時に変化させる誤りがある。偏微分では、指定されていない変数は定数として扱う。

6 問題 5

微分方程式

$$y' = xy$$

を解け。ただし、 $y = 0$ の解も確認せよ。

6.1 解答例

Correct

まず $y = 0$ は確かに $y' = 0$ を満たすので解である。つぎに $y \neq 0$ の範囲で変数分離する。 y で割るため、この場合分けが必要である。

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$

を積分して

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

である。したがって

$$y = Ce^{x^2/2}$$

を得る。 $C = 0$ とすれば $y = 0$ も含まれるため、一般解は

$$y = Ce^{x^2/2}$$

である。

6.2 解説

変数分離では、文字式で割る場面が生じやすい。この問題では y で割るため、 $y = 0$ の解を先に確認する。割った後で $C = 0$ として回収できることも確認している。

6.3 よくある誤り

$dy/y = x dx$ と書いた瞬間に $y = 0$ の可能性を落とす誤りがある。文字式で割るときは、その式が 0 になる場合を別途確認する。

7 関連講義

→ 講義 微分積分の応用 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分の応用-講義/>

→ 講義 偏微分と重積分 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/偏微分と重積分-講義/>

→ 講義 微分方程式の入口 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分方程式の入口-講義/>

→ 講義 微分方程式ポータル [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/微分方程式ポータル-講義/>