極限と連続-基本演習

→ 講義 **極限と連続** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/極限と連続-講義/

1 演習方針

極限では、値そのものではなく、入力が近づくときの出力の近づき方を確認する。連続では、極限が存在し、その値が関数値と一致するかを確認する。

---

2 問題 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

を求めよ。

2.1 解答例

Correct

$x \neq 1$ の範囲で

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

である。ここでは $x-1$ で割っているため、$x \neq 1$ を確認する。極限では $x=1$ そのものを代入していないので、この約分が使用できる。したがって

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

である。

2.2 解説

この問題は、極限では穴の位置の値ではなく、周辺の振舞いを確認することを扱っている。約分は $x=1$ では許されないが、$x \to 1$ の過程では $x \neq 1$ として扱う。

2.3 よくある誤り

0/0 だから極限が存在しない、と判断する誤りがある。0/0 は未定形であり、変形して周辺の振舞いを確認する必要がある。

---

3 問題 2

$$f(x) = \frac{|\,x\,|}{x} \qquad (x \neq 0)$$

について、$x \to 0$ の片側極限を求め、$\lim_{x\to 0} f(x)$ が存在するかを判定せよ。

3.1 解答例

Correct

$x > 0$ では $|\,x\,| = x$ なので

$$f(x) = 1$$

である。したがって

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$$

である。一方、$x < 0$ では $|\,x\,| = -x$ なので

$$f(x) = -1$$

である。したがって

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$$

である。右極限と 左極限 が一致しないため、$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない。

3.2 解説

片側極限は、左右から近づく経路を分離して確認する道具である。極限が存在するには、両側の片側極限が一致する必要がある。

3.3 よくある誤り

$x = 0$ が定義域に含まれないことだけで極限が存在しない、と判断してはならない。関数値が未定義でも、左右からの近づき方が一致すれば極限は存在しうる。

---

4 問題 3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} & (x \neq a), \\ 2a & (x = a) \end{cases}$$

が $x = a$ で連続であることを示せ。

4.1 解答例

Correct

$x \neq a$ の範囲で

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a$$

である。ここでは $x - a$ で割るため、$x \neq a$ を確認する。したがって

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$$

である。一方、定義より $f(a) = 2a$ である。よって

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

となり、f は $x = a$ で連続である。

4.2 解説

連続は、近づいた先の極限と、その点での関数値が一致するという性質である。この問題では、穴を適切な値で埋めると連続になる。

4.3 よくある誤り

$x = a$ にそのまま代入して 0/0 として終了する誤りがある。連続性では、関数値と極限を別々に確認してから比較する。

---

5 問題 4

$f(x) = 3x + 2$ について、$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$ を ε-δ 論法で示せ。

5.1 解答例

Correct

任意の $\varepsilon > 0$ を取る。$0 < |\, x - 1 \,| < \delta$ とすると、

$$|\, f(x) - 5 \,| = |\, 3x + 2 - 5 \,| = 3\,|\, x - 1 \,|$$

である。$3\,|\, x - 1 \,| < \varepsilon$ としたいので、$\delta = \varepsilon / 3$ と選べばよい。このとき

$$0 < |\, x - 1 \,| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\, f(x) - 5 \,| < 3\delta = \varepsilon$$

である。よって $\lim_{x \to 1} (3x + 2) = 5$ である。

5.2 解説

ε は出力側の許容誤差であり、δ は入力側の許容幅である。この問題では、出力側の誤差が入力側の誤差の 3 倍になるため、$\delta = \varepsilon/3$ と設定する。

5.3 よくある誤り

δ を先に固定してから ε を決めてしまう誤りがある。極限の定義では、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、それに応じる $\delta > 0$ を選ぶ。

---

6 問題 5

$f(x) = x^3 - x - 1$ について、区間 $[1, 2]$ に実数解が存在することを中間値定理で示せ。

6.1 解答例

Correct

f は多項式なので $[1, 2]$ で連続である。また、

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1, \qquad f(2) = 8 - 2 - 1 = 5$$

である。0 は -1 と 5 の間にある。したがって中間値定理より、ある $c \in (1, 2)$ が存在して

$$f(c) = 0$$

を満たす。

6.2 解説

中間値定理を使用するには、区間での連続性と、端点で値が目標値を挟むことを確認する。この問題は、解を直接計算せずに存在だけを保証する方法を確認している。

6.3 よくある誤り

端点の符号だけを確認し、連続性を確認しない誤りがある。中間値定理は連続な関数に対する定理である。

7 関連講義

→ 講義 極限と連続 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/極限と連続-講義/

→ 講義 微分法の基本 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分法の基本-講義/