積分と計算法 -基本演習

→ 講義 **積分法の基本** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/積分法の基本-講義/

→ 講義 **微分積分学の基本定理** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分学の基本定理-講義/

→ 講義 **積分公式と計算法** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/積分公式と計算法-講義/

1 演習方針

定積分は局所的な寄与の総和であり、不定積分は原始関数の探索である。微分積分学の基本定理は、この2つを接続する。

---

2 問題 1

右端点を用いるリーマン和から

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

を求めよ。

2.1 解答例

Correct

区間 $[0,1]$ を n 等分する。$\Delta x = 1/n$、右端点は $x_i = i/n$ である。したがってリーマン和は

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

である。$n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

である。よって

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

である。

2.2 解説

この問題は、積分(integration)を公式ではなく小区間の寄与の総和として確認している。リーマン和(Riemann sum)では、幅と高さを掛けた量を足し合わせ、その極限を取る。

2.3 よくある誤り

Δx を掛け忘れる誤りがある。リーマン和(Riemann sum)の 1 項は高さだけでなく、小区間の幅も含む。

---

3 問題 2

$$\int_{-1}^{1} x\,dx$$

と、$y = x$、x 軸、$x = -1$、$x = 1$ で囲まれる実面積を求めよ。

3.1 解答例

Correct

$F(x) = x^2/2$ とすると、

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

である。一方、実面積は絶対値(absolute value)を取るため、

$$\int_{-1}^{1} |\,x\,|\,dx = 2\int_{0}^{1} x\,dx = 1$$

である。

3.2 解説

定積分(definite integral)は符号付き面積(signed area)である。x 軸の下の部分は負として数えるため、実面積とは異なる場合がある。

3.3 よくある誤り

定積分(definite integral)を常に面積と同一視する誤りがある。面積を求めるときは、符号が変わる点で区間を分割する。

---

4 問題 3

$$G(x) = \int_{1}^{x} (t^2 + 1)\,dt$$

とする。$G'(x)$ を求めよ。

4.1 解答例

Correct

t^2+1 は連続であるため、微分積分学の基本定理を使用できる。したがって

$$G'(x) = x^2 + 1$$

である。

4.2 解説

$G(x)$ は 1 から x までの累積量である。微分すると、上端を少し動かしたときに追加される局所的な寄与、つまり x^2+1 が現れる。

4.3 よくある誤り

積分を先に完全に計算しなければならない、と考える誤りがある。微分積分学の基本定理は、累積関数の微分を直接に与える。

---

5 問題 4

$$H(x) = \int_x^{x^2} \sin t \, dt$$

の導関数を求めよ。

5.1 解答例

Correct

上端と下端がどちらも x に依存しているので、

$$H(x) = \int_0^{x^2} \sin t \, dt - \int_0^x \sin t \, dt$$

と分解する。連鎖律と微分積分学の基本定理より

$$H'(x) = \sin(x^2) \cdot 2x - \sin x$$

である。

5.2 解説

積分区間の向きと端点の動きが同時に効く問題である。下端が動くときは符号が反転するため、固定端を導入して分解すると安全である。

5.3 よくある誤り

$H'(x) = \sin(x^2) - \sin x$ として、x^2 の連鎖律を忘れる誤りがある。端点が関数である場合は、その端点の導関数も掛かる。

---

6 問題 5

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx$$

と

$$\int x e^x\, dx$$

を計算せよ。

6.1 解答例

Correct

第一の積分では $u = x^2$ と置換する。$du = 2x\, dx$ なので

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(x^2) + C$$

である。

第二の積分では部分積分を使用する。$f = x$、$g' = e^x$ と置くと、$f' = 1$、$g = e^x$ である。したがって

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + C$$

である。

6.2 解説

置換積分は連鎖律の逆向きであり、内側の導関数が外側に現れる場合に自然である。部分積分は積の微分公式の逆向きであり、一方を微分すると簡単になる場合に選択する。

6.3 よくある誤り

置換積分で du に対応する因子を確認しない誤りがある。また、部分積分でどちらを微分するかを無作為に選ぶと、計算が複雑になる。

7 関連講義

→ 講義 積分法の基本 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/積分法の基本-講義/

→ 講義 **微分積分学の基本定理** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分学の基本定理-講義/

→ 講義 **積分公式と計算法** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/積分公式と計算法-講義/