

# 一階微分方程式の分類と解法-基本演習

→ [講義](#) 一階微分方程式の解法診断 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一階微分方程式の解法診断-講義/>

## 1 演習方針

この演習では、計算を開始する前に、方程式の型を判定する。変数分離で直接分離できるか、一階線型として積分因子を導入するか、完全微分としてポテンシャル関数を復元するかを区別することが目的である。

## 2 問題 1

次の方程式を、変数分離形、一階線型、完全微分方程式、Bernoulli 方程式、Logistic 方程式、または標準的な初等解法に直結しない型へ分類せよ。

$$y' = xy, \quad y' + 2y = e^{-x}, \quad (2xy + 1) dx + x^2 dy = 0, \quad y' = y - y^2, \quad y' = \sin(xy)$$

### 2.1 解答例

#### Correct

順に、変数分離形、一階線型、完全微分方程式、Logistic 方程式、標準的な一階初等解法に直結しない型である。

### 2.2 解説

$y' = xy$  は  $dy/y = x dx$  と分離できる。 $y' + 2y = e^{-x}$  は  $y' + P(x)y = Q(x)$  の標準形である。 $(2xy + 1) dx + x^2 dy = 0$  は  $M_y = 2x$ 、 $N_x = 2x$  なので完全性を満たす。 $y' = y - y^2$  は  $y' = y(1 - y)$  であり、平衡解をもつ Logistic 型である。 $y' = \sin(xy)$  は分離、線型、完全、Bernoulli の判定に直結しない。

## 3 問題 2

初期値問題

$$y' = xy, \quad y(0) = 1$$

を解け。

### 3.1 解答例

#### Correct

$$y = e^{x^2/2}$$

### 3.2 解説

$y' = xy$  は  $y \neq 0$  の範囲で

$$\frac{dy}{y} = x dx$$

と分離できる。積分して

$$\log|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

を得る。初期条件  $y(0) = 1$  から  $C = 0$  であり、解は  $y = e^{x^2/2}$  である。変数分離では、分離後に初期条件を戻して定数を決定する。

## 4 問題 3

初期値問題

$$y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 0$$

を積分因子で解け。

### 4.1 解答例

Correct

$$y = e^{-x} - e^{-2x}$$

### 4.2 解説

標準形は  $y' + P(x)y = Q(x)$  であり、ここでは  $P(x) = 2$  である。積分因子は

$$\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

となる。したがって

$$(e^{2x}y)' = e^{2x}e^{-x} = e^x$$

である。積分して  $e^{2x}y = e^x + C$ 、すなわち  $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$  を得る。初期条件から  $0 = 1 + C$  なので  $C = -1$  である。

## 5 問題 4

微分方程式

$$(2xy + 1) dx + x^2 dy = 0$$

を完全微分方程式として解け。

## 5.1 解答例

Correct

$$x^2y + x = C$$

## 5.2 解説

$M = 2xy + 1$ ,  $N = x^2$  とおくと、 $M_y = 2x$ ,  $N_x = 2x$  である。したがって単連結な領域では完全である。ポテンシャル関数  $\Phi$  は

$$\Phi_x = 2xy + 1$$

を満たすので、 $x$  で積分して

$$\Phi = x^2y + x + h(y)$$

と表せる。さらに  $\Phi_y = x^2 + h'(y)$  が  $N = x^2$  に一致するため、 $h'(y) = 0$  である。よって  $\Phi = C$  が解曲線である。

## 6 問題 5

初期値問題

$$y' = y - y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

を解き、平衡解との関係を説明せよ。

## 6.1 解答例

Correct

$$y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

平衡解は  $y = 0, 1$  であり、この初期値の解は  $x \rightarrow \infty$  で 1 に近づく。

## 6.2 解説

$y' = y(1 - y)$  は変数分離により

$$\frac{dy}{y(1 - y)} = dx$$

となる。部分分数分解により

$$\log \left| \frac{y}{1 - y} \right| = x + C$$

を得る。 $y(0) = 1/2$  から  $C = 0$  であるため  $y/(1-y) = e^x$ 、すなわち  $y = 1/(1+e^{-x})$  である。右辺  $y(1-y)$  の符号から、 $0 < y < 1$  では増加し、 $y = 1$  が安定な平衡解である。

## 7 問題 6

$y' = \sin(xy)$  に対して、上の分類に基づく初等解法を機械的に適用できない理由を述べよ。

### 7.1 解答例

#### Correct

$\sin(xy)$  は  $x$  だけの因子と  $y$  だけの因子に分離されず、 $y' + P(x)y = Q(x)$  の形にもならず、完全微分方程式の形にも直接変形されない。したがって、まず存在一意性、数値解法、定性的解析へ切り替えるのが自然である。

### 7.2 解説

一階微分方程式では、解法を選択する前に型を確認する。どの標準型にも直結しない場合、無理に公式へ代入しない。存在一意性、方向場、数値解法、近似の役割を確認することが次の作業である。