一階線型と積分因子-基本演習

→ 講義 一階線型と積分因子 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一階線型と積分因子-講義/

1 演習の方針

一階線型では、まず 標準形

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

に直す。この 形 に直せると、積分因子 $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ により左辺を積の微分に変えられる。

---

2 問題 1

次の微分方程式を解け。

$$y' + 2y = e^x$$

2.1 解答例

Correct

$$y = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}$$

2.2 解説

ここでは $P(x) = 2$ なので、積分因子は $\mu = e^{2x}$ である。 両辺 に掛けると

$$(e^{2x}y)' = e^{3x}$$

となる。積分して $e^{2x}y = e^{3x}/3 + C$ を得る。

---

3 問題 2

次の式を 標準形 に直してから解け。

$$xy' + y = x^2, \qquad x > 0$$

3.1 解答例

Correct

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$$

3.2 解説

$x > 0$ なので x で割っても 0 による除算にはならない。標準形は

$$y' + \frac{1}{x}y = x$$

であり、積分因子(integrating factor)は $\mu = x$ である。すると $(xy)' = x^2$ となる。

---

4 問題 3

初期条件 $y(0) = 1$ を満たす解を求めよ。

$$y' - y = 2$$

4.1 解答例

Correct

$$y = 3e^x - 2$$

4.2 解説

同次解(homogeneous solution)は Ce^x で、定数の特解(particular solution)は -2 である。したがって $y = Ce^x - 2$ で、初期条件から $C = 3$ である。

5 講義リンク

→ 講義 **一階線型と積分因子** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一階線型と積分因子-講義/

→ 講義 **一階微分方程式の分類と最初の判定** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一階微分方程式の分類と最初の判定-講義/