

二階線型微分方程式-基本演習

→ [講義](#) 一般の二階線型微分方程式の見取り図 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/>一般の二階線型微分方程式の見取り図-講義/

1 演習方針

この演習では、一般の二階線型と定数係数の特殊解法を混同しないことを重視する。特性方程式は、係数が定数であり、 e^{rx} が微分で形を保つ場合に自然な方法である。

2 問題 1

次の二つを比較し、どちらが一般の二階線型方程式で、どちらが定数係数の特殊形かを判定せよ。

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \quad y'' + 3y' + 2y = e^x$$

2.1 解答例

Correct

前者は一般の二階線型方程式である。後者は定数係数の非同次二階線型方程式である。

2.2 解説

線型とは、 y, y', y'' に対して一次で現れることを意味する。定数係数とは、 P, Q が定数であることを意味する。線型であることと定数係数であることは別の条件である。

3 問題 2

同次方程式

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

を解け。

3.1 解答例

Correct

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

3.2 解説

特性方程式は

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

であり、 $(r+1)(r+2) = 0$ から $r = -1, -2$ を得る。異なる実根が二つ存在するため、基本解は e^{-x} 、 e^{-2x} である。

4 問題 3

重解が現れる方程式

$$y'' - 2y' + y = 0$$

を解け。

4.1 解答例

Correct

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x$$

4.2 解説

特性方程式は $(r-1)^2 = 0$ であり、 $r = 1$ が重解である。解空間は二次元でなければならないので、 e^x だけでは不足する。そこで xe^x を第二の独立解として採用する。

5 問題 4

複素根が現れる方程式

$$y'' + 4y = 0$$

を実数解の形で解け。

5.1 解答例

Correct

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

5.2 解説

特性方程式は $r^2 + 4 = 0$ であり、 $r = \pm 2i$ である。Euler の公式により、 e^{2ix} と e^{-2ix} の実部・虚部から $\cos 2x$ 、 $\sin 2x$ が実数解として得られる。

6 問題 5

非同次方程式

$$y'' - y = x$$

を未定係数法で解け。

6.1 解答例

Correct

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$$

6.2 解説

同次方程式 $y'' - y = 0$ の解は $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ である。右辺が一次式なので、特解を $y_p = Ax + B$ と仮定する。 $y_{(p)}'' - y_p = -(Ax + B)$ が x に一致するため、 $A = -1$ 、 $B = 0$ である。

7 問題 6

共鳴が発生する方程式

$$y'' + y = \cos x$$

に対して、特解の形を選び、一般解を求めよ。

7.1 解答例

Correct

同次解に $\cos x$ が含まれるため、特解は $y_p = Ax \sin x$ と置く。計算すると $A = 1/2$ である。したがって $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x$ である。

7.2 解説

右辺の $\cos x$ は同次解に含まれる。そのまま $A \cos x + B \sin x$ と置くと同次解と重なり、特解を作れない。 x を掛ける補正は、線型独立性を回復するためである。

8 問題 7

e^x と e^{-x} の Wronskian を計算し、独立性を判定せよ。

8.1 かいとうれい 解答例

Correct

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

である。0 でないため、2つの関数かんすうは線型独立せんけいどくりつである。

8.2 かいせつ 解説

Wronskian は、候補こうほとなる解が解空間の基底かを構成できるかを確認する道具かうぐである。0 でない Wronskian は独立性どくりつせいを保証ほしょうする。