

存在一意性と数値解法-基本演習

→ [講義](#) 初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口-講義/>

1 演習方針

この演習では、微分方程式を解く前に、解が存在するか、一意に定まるか、数値解が安定に計算されるかを確認する。公式で閉じた形の解を得ることと、解の存在を保証することは別の問題である。

2 問題 1

初期値問題

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 0$$

について、局所解の存在と一意性を判定せよ。

2.1 解答例

Correct

$f(x, y) = x + y^2$ は連続であり、 y に関する偏微分 $f_y = 2y$ も初期点の近傍で連続である。したがって、初期点の近傍で一意的な局所解が存在する。

2.2 解説

存在には f の連続性が基本であり、一意性には y に関する局所 Lipschitz 性が本質である。 f_y の連続性は Lipschitz 性を確認する分かりやすい十分条件である。

3 問題 2

初期値問題

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

について、一意性が破れる理由を説明せよ。

3.1 解答例

Correct

$y = 0$ は解である。一方、任意の $a \geq 0$ に対して、 $x \leq a$ で $y = 0$ 、 $x \geq a$ で $y = (x - a)^2/4$ と定めた関数も解である。したがって一意性は成立しない。

3.2 解説

$f(y) = \sqrt{|y|}$ は連続なので存在は期待できる。しかし $y = 0$ の近傍で Lipschitz 条件を満たさない。原点で待機してから動き始める解が許されるため、初期条件だけでは解が一意に定まらない。

4 問題 3

初期値問題

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

を解き、最大存在区間を求めよ。

4.1 解答例

Correct

$$y = \frac{1}{1-x}$$

であり、最大存在区間は $(-\infty, 1)$ である。

4.2 解説

変数分離により $dy/y^2 = dx$ である。積分して $-1/y = x + C$ 、初期条件から $C = -1$ なので $y = 1/(1-x)$ を得る。右辺 y^2 は滑らかであり局所一意解は存在するが、 $x = 1$ で blow-up する。一意な解が存在しても、全実数で存在するとは限らない。

5 問題 4

Forward Euler 法で

$$y' = -2y, \quad y(0) = 1$$

を刻み幅 $h = 0.25$ で二歩だけ計算せよ。

5.1 解答例

Correct

更新式は $y_{n+1} = y_n + h(-2y_n) = (1 - 2h)y_n$ である。 $h = 0.25$ なので $y_{n+1} = 0.5y_n$ であり、 $y_1 = 0.5$ 、 $y_2 = 0.25$ である。

5.2 解説

Forward Euler 法は接線の傾きで短時間だけ進む近似である。局所打切り誤差は典型的に $O(h^2)$ 、大域誤差は $O(h)$ である。ただし、精度と安定性は別概念である。

6 問題 5

Forward Euler 法を

$$y' = -10y$$

へ適用する。数値解が減衰するための刻み幅 h の条件を求め、 $h = 0.3$ が不安定になる理由を述べよ。

6.1 解答例

Correct

更新式は $y_{n+1} = (1 - 10h)y_n$ である。減衰には $|1 - 10h| < 1$ が必要なので、 $0 < h < 0.2$ である。 $h = 0.3$ では $1 - 10h = -2$ となり、絶対値が 1 を超えるため不安定である。

6.2 解説

真の解 e^{-10x} は単調に減衰する。しかし数値法では、更新係数の絶対値が 1 を超えると誤差が拡大する。微分方程式が安定でも、数値解法と刻み幅の選択が不適切なら計算は不安定になりうる。

7 問題 6

閉じた式で解くことが困難な初期値問題に対して、解析解、数値解、定性的解析の役割を一文ずつ説明せよ。

7.1 解答例

Correct

解析解は、式として構造を理解する役割を持つ。数値解は、具体的な初期値に対して近似値を計算する役割を持つ。定性的解析は、平衡点、安定性、増減、長時間挙動を読解する役割を持つ。

7.2 解説

と 解けないという語を、ご 解が存在しないという意味でかい 使用してはならない。しょとうかんすう 初等関数でひょうげん 表現できない場合でばあい も、そんざいいちいせい 存在一意性、すうちけいさん 数値計算、ていせいてきかいせき 定性的解析によりじょうほう 情報をしゅとく 取得できる。