

連立系と安定性-基本演習

→ [講義](#) 一階連立系と行列指数関数 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一階連立系と行列指数関数-講義/>

1 演習方針

この演習では、連立微分方程式を行列で表現し、固有値から時間発展と安定性を判定する。相平面は図だけで判断する対象ではなく、平衡点、線型化、固有値を対応させて確認する対象である。

2 問題 1

連立系

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を解け。

2.1 解答例

Correct

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

2.2 解説

対角行列では、各成分が独立した一階方程式になる。第一成分は増加し、第二成分は減衰する。固有値の実部が符号を決める。

3 問題 2

連立系

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解き、相平面での運動を述べよ。

3.1 解答例

Correct

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$$

である。原点を中心とする円運動である。

3.2 解説

係数行列は回転を生成する行列である。固有値は $\pm 3i$ であり、実部が 0 なので指数的な増加も減衰も発生しない。中心の代表例である。

4 問題 3

二階線型方程式

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

を一階連立系へ変換し、固有値を求めよ。

4.1 解答例

Correct

$x_1 = y$ 、 $x_2 = y'$ とおくと、 $x_{(1)'} = x_2$ 、 $x_{(2)'} = -2x_1 - 3x_2$ である。係数行列の固有値は $-1, -2$ である。

4.2 解説

高階方程式は、状態変数を導入すると一階連立系へ変換できる。特性方程式と係数行列の固有値は対応する。

5 問題 4

線型系

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

の平衡点の型を判定せよ。

5.1 解答例

Correct

原点は鞍点であり、不安定である。

5.2 解説

固有値は 2 と -1 である。一方の方向では解が増加し、他方の方向では減衰する。符号が混在する場合、原点は鞍点である。

6 問題 5

線型系

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x$$

の平衡点を分類せよ。

6.1 解答例

Correct

固有値は $-1 \pm 2i$ である。原点は安定焦点である。

6.2 解説

複素固有値の虚部は回転を表し、実部は増減を表す。実部が負なので軌道は回転しながら原点へ接近する。

7 問題 6

非線型系

$$x' = x - x^2, \quad y' = -y$$

の平衡点を求め、線型化により安定性を判定せよ。

7.1 解答例

Correct

平衡点は $(0, 0)$ と $(1, 0)$ である。Jacobian 行列は $\text{diag}(1 - 2x, -1)$ である。 $(0, 0)$ では固有値 $1, -1$ なので鞍点で不安定である。 $(1, 0)$ では固有値 $-1, -1$ なので局所漸近安定である。

7.2 解説

非線型系では、平衡点近傍で一次近似を確認する。Jacobian 行列の固有値が零の実部を含まない場合、線型化は局所挙動をよく反映する。

8 問題 7

線型系

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

に対して、固有値だけで漸近安定性を主張できない理由を述べよ。

8.1 解答例

Correct

固有値は $\pm i$ であり、実部が 0 である。解は原点を中心に回転し、原点へ接近しない。したがって漸近安定ではない。

8.2 解説

実部が負なら減衰、正なら増大を判定しやすい。しかし実部が 0 の場合は境界的であり、中心、非線型項、保存量の確認が必要になる。