非同次方程式と特解構成- 標準演習

nonhomogeneous equation　particular solution

→ 講義 非同次方程式と未定係数法 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/非同次方程式と未定係数法-講義/

1 演習の方針

非同次(nonhomogeneous)の線型(linear)な式では、解を

$$y = y_h + y_p$$

に分ける。y_h は同次方程式(homogeneous equation)の解、y_p は右辺を作る特解(particular solution)である。

---

2 問題 1

次の微分方程式(differential equation)を未定係数法(method of undetermined coefficients)で解け。

$$y'' - y = x$$

2.1 解答例

Correct

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$$

2.2 解説

同次解(homogeneous solution)は $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ である。右辺が一次式なので、特解(particular solution)を $y_p = Ax + B$ と置く。$y_{(p)''} - y_p = -(Ax + B)$ を x に一致させると $A = -1, B = 0$ である。

---

3 問題 2

共鳴が起こる場合を解け。

$$y'' + y = \cos x$$

3.1 解答例

Correct

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$$

3.2 解説

$\cos x$ は 同次解 に含まれるので、そのまま $A\cos x + B\sin x$ と置くと失敗する。x を掛けて重なりを外すことが、共鳴への補正である。

---

4 問題 3

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ について Wronskian を計算し、定数変化法で使えるか判定せよ。

4.1 解答例

Correct

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

$W(x) \neq 0$ なので、これらは 基本解 として使える。

4.2 解説

Wronskian が 0 でないことは、定数変化法で分母に現れる量が 0 にならないことを保証する。割り算が出る場面なので、ここでは $W(x) \neq 0$ の確認が必要である。

5 講義リンク

→ 講義 非同次方程式と未定係数法 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/非同次方程式と未定係数法-講義/

→ 講義 定数変化法と Wronskian lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/定数変化法と Wronskian-講義/