SVD と擬似逆行列-基本演習

pseudoinverse

→ 講義 特異値分解の入口 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/特異値分解の入口-講義/

→ 講義 擬似逆行列の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/擬似逆行列の基本-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

1 演習方針

特異値分解は、行列を入力側の直交方向、非負の伸縮率、出力側の直交方向に分解する。擬似逆行列は、0 でない特異値だけを逆数にし、0 の特異値は逆にしない。

---

2 問題 1

つぎの空欄を埋めよ。

「特異値分解は、長方行列を、入力側の直交基底、非負の伸縮率、出力側の直交基底に分解する。擬似逆行列は、0 でない特異値を ____ し、0 の特異値は ____ ことで、最小二乗解や最小ノルム解を記述する。」

2.1 解答例

Correct

「逆数に」し、「そのまま 0 として扱う」。

2.2 解説

0 の特異値を逆数にしようとすると 0 による除算になる。擬似逆行列では、潰れた方向を無理に復元しない。

---

3 問題 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

のコンパクト SVDを 1 つ求めよ。

3.1 解答例

Correct

$$A^TA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

なので、特異値は $4, 3$ である。右特異ベクトルを

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと、

$$u_1 = \frac{Av_1}{4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{Av_2}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。したがって $A = U_r\Sigma_r V_r^T$、ただし

$$U_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_r = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad V_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

3.2 解説

コンパクト SVDでは、0 でない特異値に対応する方向だけを残す。階数や列空間を読むには、この形が扱いやすい。

---

4 問題 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、特異値、核、像を求め、最大の特異値だけを残す階数 1 近似が何を保存し何を捨てるかを説明せよ。

4.1 解答例

Correct

A^TA は

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので、特異値は $3, 1, 0$ である。また、

$$\ker A = \operatorname{span}(e_3), \qquad \operatorname{Im} A = \operatorname{span}(e_1, e_2)$$

である。最大の特異値だけを残す階数 1 近似は

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

4.2 解説

A_1 は最も強く残る e_1 方向を保存し、e_2 方向の弱い成分と e_3 方向の核を捨てる。SVD による近似は、方向ごとの重要度を特異値で測る。

---

5 問題 4

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、非零特異値を使って B^+ を求め、BB^+ と B^+B が何への射影かを説明せよ。

5.1 解答例

Correct

$B = uv^T$ と書ける。ただし

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$\| u \| = \sqrt{5}$、$\| v \| = \sqrt{2}$ なので、非零特異値は $\sqrt{10}$ である。したがって

$$B^+ = \frac{1}{10} v u^T = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

である。BB^+ は $\operatorname{span}(u)$ への直交射影であり、B^+B は $\operatorname{span}(v)$ への直交射影である。

5.2 解説

擬似逆行列は、潰れていない方向だけを逆向きに戻す。BB^+ と B^+B は恒等変換ではなく、残っている情報の空間への射影である。

---

6 問題 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について、A^+ を使って最小二乗解を求めよ。

6.1 解答例

Correct

$$A^+ = \frac{1}{2}(1 \;\; 1)$$

なので、

$$x = A^+ b = 1$$

である。近似ベクトルは $Ax = (1,1)^T$、残差は

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。$A^T r = 0$ なので、残差は列空間に直交する。

6.2 解説

過剰決定系では、$Ax = b$ が厳密には解けない場合がある。擬似逆行列は、列空間への射影に対応する最小二乗解を返す。

---

7 問題 6

$$A = (1 \;\; 1), \qquad b = 2$$

について、$Ax = b$ の解が無限にあることを確認し、$A^+ b$ が最小ノルム解になることを説明せよ。

7.1 解答例

Correct

$$A^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので、

$$A^+ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$Ax = b$ は $x_1 + x_2 = 2$ なので、一般解は

$$x = \begin{pmatrix} 2 - t \\ t \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である。この解の長さの二乗は

$$\| x \|^2 = (2-t)^2 + t^2 = 2(t-1)^2 + 2$$

なので、$t=1$ のとき最小になる。

7.2 解説

劣決定系では、解が無限に存在する場合がある。擬似逆行列は、その中から長さが最小の解を選ぶ。

---

8 問題 7

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、C^*C を計算し、特異値を求めよ。

8.1 解答例

Correct

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

なので

$$C^*C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

である。この行列の固有値は $2, 0$ である。したがって C の特異値は

$$\sqrt{2}, \quad 0$$

である。

8.2 解説

複素行列では A^TA ではなく A^*A を使う。共役転置を使うことで、A^*A はエルミート行列かつ非負定値になる。

---

9 関連演習

→ 基本演習 **固有値・対角化・発展** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/固有値・対角化・発展-基本演習/

→ 基本演習 **二次形式・最小多項式・ジョルダン** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/二次形式・最小多項式・ジョルダン-基本演習/

→ 基本演習 **複素内積とユニタリ行列** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-基本演習/

10 関連講義

→ 講義 **特異値分解の入口** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/特異値分解の入口-講義/

→ 講義 **擬似逆行列の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/擬似逆行列の基本-講義/

→ 講義 **複素内積とユニタリ行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/