ベクトルと線型結合-基本演習

linear combination

→ 講義 線型性の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/

→ 講義 ベクトルの基本演算 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトルの基本演算-講義/

→ 講義 線型結合と張る空間の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/

→ 講義 列ベクトルの独立性と階数への橋渡し lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列ベクトルの独立性と階数への橋渡し-講義/

1 演習方針

この演習では、ベクトルを成分の並びとして計算するだけでなく、空間の点または矢印として読む。線型結合は「与えられた方向をどれだけ混ぜるか」を表し、張る空間は「その方向だけで到達できる範囲」を表す。

各問題では、答えだけでなく、どの性質を確認しているかを明示する。

---

2 問題 1

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して、$2u - 3v$ を求めよ。また、この計算が幾何的に何をしているかを述べよ。

2.1 解答例

Correct

$$2u - 3v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

これは、u の方向へ 2 倍だけ進み、v の逆向きへ 3 倍だけ進む操作である。

2.2 解説

ベクトルの和とスカラー倍は、成分ごとに行う。この問題の目的は、成分計算と矢印の移動を対応させることである。$2u - 3v$ は一つのベクトルだが、その作り方は「u と v から作った線型結合」である。

---

3 問題 2

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

とする。b が a_1, a_2 の線型結合で表せるかを判定し、表せるなら係数を求めよ。

3.1 解答例

Correct

$$xa_1 + ya_2 = b$$

とおくと、

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

である。これを解くと $y = \frac{11}{5}$、$x = \frac{12}{5}$ である。したがって、

$$b = \frac{12}{5}a_1 + \frac{11}{5}a_2$$

である。

3.2 解説

「b が a_1, a_2 で張られる空間に入るか」は、「$xa_1 + ya_2 = b$ を満たす x, y が存在するか」と同値である。この同値性を確認してから連立方程式を解くので、計算は単なる代入ではなく、張る空間への所属判定になっている。

---

4 問題 3

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が一次独立か一次従属かを判定せよ。

4.1 解答例

Correct

$$c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 = 0$$

とおくと、

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0, \\ c_2 - c_3 = 0, \\ 2c_1 - c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$$

である。$c_1 = -2c_3$、$c_2 = c_3$ を第3式に代入すると、

$$2(-2c_3) - c_3 + 5c_3 = 0$$

となり、これは恒等的に成り立つ。たとえば $c_3 = 1$ とすると $c_1 = -2$、$c_2 = 1$ であり、

$$-2w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

である。したがって一次従属である。

4.2 解説

一次独立とは、$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0$ から $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ だけが出ることである。非自明な係数が見つかれば一次従属である。この問題では $w_3 = 2w_1 - w_2$ なので、w_3 は新しい方向を追加していない。

---

5 問題 4

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で張られる空間を幾何的に説明せよ。

5.1 解答例

Correct

$q = 2p$ なので、p, q は同じ方向を向いている。したがって、

$$\operatorname{span}(p, q) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

であり、原点を通る直線である。

5.2 解説

2本のベクトルがあっても、方向が同じなら平面は作れない。張る空間の次元は、ベクトルの本数ではなく、独立な方向の数で決まる。この視点が階数の理解につながる。

---

6 問題 5

次の主張が正しいかを判定し、理由を述べよ。

1. 零ベクトルを含むベクトル集合は一次従属である。
2. 1本だけからなる集合 $\{u\}$ は、$u \neq 0$ なら一次独立である。
3. 空の集合は、標準的な定義では一次独立として扱う。

6.1 解答例

Correct

すべて正しい。

6.2 解説

零ベクトルを含む場合、その零ベクトルに対応する係数を 1、ほかを 0 にすれば、非自明な線型結合で 0 が作れる。したがって一次従属である。1 本の場合は $cu = 0$ から、$u \neq 0$ なら $c = 0$ が従う。空集合では反例となる非自明な係数が存在しないので、一次独立と定義する。このような境界例を確認しておくと、基底や次元の議論で例外を見落としにくい。

---

7 補充問題：講義から移動した確認

7.1 問題 6

$u = (2, -1, 3)^T$、$v = (0, 4, 1)^T$ に対して $u + v$ と $3u - 2v$ を計算せよ。

Correct

$u + v = (2, 3, 4)^T$、$3u - 2v = (6, -11, 7)^T$ である。

この問題は、ベクトルの和とスカラー倍を成分ごとに行うことを確認する。

7.2 問題 7

$a(1, 0)^T + b(0, 1)^T = (5, -2)^T$ を満たす a, b を求めよ。

Correct

$a = 5$、$b = -2$ である。

この問題は、標準基底では係数がそのまま成分になることを確認する。

7.3 問題 8

$2(1, 1)^T - (3, -1)^T$ がどの方向を表すかを成分で確認せよ。

Correct

$2(1, 1)^T - (3, -1)^T = (-1, 3)^T$ である。

この問題は、線型結合が複数の方向を係数つきで組み合わせる操作であることを確認する。

7.4 問題 9

$(1,0)^T$ と $(1,1)^T$ が $\mathbb{R}^2$ を張るか判定せよ。

Correct

$a(1,0)^T + b(1,1)^T = (a+b, b)^T$ である。任意の $(x,y)^T$ に対して $b = y$、$a = x - y$ と取れるので、$\mathbb{R}^2$ を張る。

この問題は、「張る」とは任意の目標ベクトルを線型結合で作れることだと確認する。

7.5 問題 10

$(1,2)^T$ と $(2,4)^T$ の張る空間を説明せよ。

Correct

$(2,4)^T = 2(1,2)^T$ なので、張る空間は $\{t(1,2)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$ である。

この問題は、ベクトルの本数ではなく独立な方向の数が張る空間を決めることを確認する。

7.6 問題 11

$(3,1)^T$ が $(1,0)^T, (0,1)^T$ の線型結合で表せることを確認せよ。

Correct

$(3,1)^T = 3(1,0)^T + 1(0,1)^T$ である。

この問題は、標準基底が $\mathbb{R}^2$ 全体を張ることを確認する。

---

8 補充問題：零ベクトルと張る空間の境界例

8.1 問題 12

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

について、$0u$、$-u$、$u + (-u)$ を求め、それぞれが何を表すか説明せよ。

Correct

$$0u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad -u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad u + (-u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。$0u$ は方向を失った零ベクトル、$-u$ は u と反対向きのベクトル、$u + (-u)$ は加法逆元によって零ベクトルへ戻ることを表す。

この問題は、ベクトル演算で何が変わるかを確認する境界例である。$0u$ は向きを保存せず、$-u$ は直線そのものは変えずに向きを反転する。

8.2　問題 13

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

について、

$$\mathrm{span}(u), \qquad \mathrm{span}(u, 0), \qquad \mathrm{span}(u, 2u)$$

が同じ集合であることを説明せよ。

Correct

$0 = 0u$、$2u$ は u の定数倍である。したがって、0 や $2u$ を追加しても、u から作れる線型結合の範囲は増えない。

$$\mathrm{span}(u) = \mathrm{span}(u, 0) = \mathrm{span}(u, 2u)$$

である。

この問題は、生成集合に余分なベクトルを加えても、張る空間が変わらない場合を確認する。本数が増えることと、独立な方向が増えることは別である。

9　関連講義

→ 講義 **線型性の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/

→ 講義 **ベクトルの基本演算** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトルの基本演算-講義/

→ 講義 **線型結合と張る空間の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/

→ 講義 **列ベクトルの独立性と階数への橋渡し** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列ベクトルの独立性と階数への橋渡し-講義/

→ 講義 **階数の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/