ベクトル空間・基底・階数-基本演習

→ 講義 ベクトル空間と基底 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ 講義 線型写像と行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

→ 講義 階数の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/

1 演習方針

基底は、空間の点を座標で一意に表すための物差しである。階数は、線型写像で潰れずに出力側へ残る次元である。この演習では、定義、計算、幾何的な読みを対応させる。

---

2 問題 1

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \right\}$$

が $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを確認せよ。

2.1 解答例

Correct

$0+0+0=0$ なので零ベクトルを含む。$u, v \in W$ なら、u の成分和も v の成分和も 0 なので、$u+v$ の成分和も 0 である。また $c \in \mathbb{R}$ に対して、cu の成分和は $c \cdot 0 = 0$ である。したがって部分空間である。

2.2 解説

部分空間の確認では、零ベクトル、和、スカラー倍の 3 点を見る。零ベクトルを含まない集合は、その時点で部分空間ではない。この問題は、特殊ケースの確認を先に行う練習である。

---

3 問題 2

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が、問題 1 の W の基底ではないことを説明せよ。

3.1 解答例

Correct

b_1 は $1+1+0=2$ なので W に属さない。したがって、b_1, b_2 は W の基底ではない。

3.2 解説

基底であるためには、まずそのベクトルが対象の空間に属していなければならない。一次独立や生成を調べる前に、所属を確認する。この順序を守ると、論理の飛躍を避けられる。

---

4 問題 3

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が問題 1 の W の基底であることを示し、

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

のこの基底に関する座標を求めよ。

4.1 解答例

Correct

u_1, u_2 はどちらも成分和が 0 なので W に属する。$au_1 + bu_2 = 0$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a+b \\ -a \\ -b \end{pmatrix} = 0$$

より $a=0$、$b=0$ なので一次独立である。任意の W の元は $(x,y,z)^T$ で $x+y+z=0$ を満たすから、

$x = -y-z$ であり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-y)u_1 + (-z)u_2$$

と表せる。よって基底である。

$w = au_1 + bu_2$ とおくと $-a=-1$、$-b=-2$ なので $a=1$、$b=2$ である。したがって座標は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

4.2 解説

基底の確認は、所属、一次独立、生成の順に進めると行間が小さくなる。座標は「どの基底をどれだけ混ぜるか」を表す係数であり、基底が変われば同じベクトルでも座標は変わる。

---

5 問題 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が表す線型写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ について、$\operatorname{rank} A$ と $\ker T$ の次元を求めよ。

5.1 解答例

Correct

2 行は一次独立で、pivot は 2 個あるので

$$\operatorname{rank} A = 2$$

である。階数-退化次数の関係より、

$$\dim \ker T = 3 - 2 = 1$$

である。

5.2 解説

T は 3 次元の入力を 2 次元の出力へ送る。階数は出力側に残る独立な方向の数である。入力の 3 次元のうち 2 次元が像に反映され、1 次元が零へ潰れる。この解釈が $\dim \ker T = 1$ である。

---

6 問題 5

線型写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が可逆であることと、$\ker T = \{0\}$ であることの関係を、有限次元の同次元の場合に限って説明せよ。

6.1 解答例

Correct

$\ker T = \{0\}$ なら入力の違いが零へ潰れないので、T は単射である。$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線型写像では、単射なら全射でもある。したがって可逆である。逆に可逆なら $T(x) = 0$ から $x = T^{-1}(0) = 0$ が従うので、$\ker T = \{0\}$ である。

6.2 解説

ここでは同次元であることが重要である。異なる次元では、単射と全射が同値になるとは限らない。条件を明示してから性質を使うことで、証明の射程が明確になる。

---

7 補充問題：列ベクトルと階数

7.1 問題 6

$(1,0)^T, (2,0)^T$ が一次独立か判定せよ。

Correct

$(2,0)^T = 2(1,0)^T$ なので一次従属である。

この問題は、2 本のベクトルが同じ方向なら新しい方向を増やさないことを確認する。

7.2 問題 7

$(1,0)^T, (0,1)^T, (1,1)^T$ の階数を答えよ。

Correct

$(1,0)^T, (0,1)^T$ は一次独立で、$(1,1)^T = (1,0)^T + (0,1)^T$ である。したがって階数は 2 である。

この問題は、階数がベクトルの本数ではなく、独立な方向の最大本数であることを確認する。

7.3 問題 8

列ベクトルの一次関係が $Ac = 0$ と書ける理由を説明せよ。

Correct

$A = [a_1 \cdots a_n]$、$c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ とすると、$Ac = c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n$ である。したがって列の一次関係 $c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$ は $Ac = 0$ と同値である。

この問題は、行列積を列ベクトルの線型結合として読むことを確認する。

7.4 問題 9

$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W_1 = \{(x,y,z)^T \mid x + y + z = 1\}$$

$$W_2 = \{(x,y,z)^T \mid x + y + z = 0\}$$

$$W_3 = \{(x,y,z)^T \mid x \geq 0\}$$

について、部分空間であるかを判定し、失敗する場合はどの条件が壊れるかを述べよ。

Correct

W_1 は零ベクトルを含まないので部分空間ではない。W_2 は零ベクトルを含み、和とスカラー倍で閉じているので部分空間である。W_3 は零ベクトルを含むが、$(1,0,0)^T \in W_3$ に対して $-(1,0,0)^T = (-1,0,0)^T \notin W_3$ なので、スカラー倍で閉じていない。

この問題は、部分空間の判定では「零ベクトル」「和」「スカラー倍」を分けて確認する必要があることを確認する。

7.5 問題 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を行基本変形で階段形にし、rank A、列空間の基底、ker A の次元を求めよ。

Correct

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。ピボットは第 1 列と第 2 列にあるので、$\operatorname{rank} A = 2$ である。列空間の基底として、元の行列の第 1 列と第 2 列

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を取れる。また未知数は 3 個なので、階数-退化次数定理より

$$\dim \ker A = 3 - 2 = 1$$

である。

この問題は、行基本変形で階数を求めたあと、主成分列を元の行列へ戻して列空間の基底を読む練習である。

7.6 問題 11

$\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として見る場合と、$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として見る場合で、基底と次元がどう変わるかを説明せよ。

Correct

$\mathbb{C}$ 上では、1 だけで任意の $z \in \mathbb{C}$ を $z \cdot 1$ と表せるので、基底は $\{1\}$、次元は 1 である。

$\mathbb{R}$ 上では、任意の $z = a + bi$ を $a \cdot 1 + b \cdot i$ と表すので、基底は $\{1, i\}$、次元は 2 である。

この問題は、基底と次元が集合だけで決まるのではなく、どの体をスカラーとして使うかにも依存することを確認している。

7.7 問題 12

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を、標準基底 $E = (e_1, e_2)$ と

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

のそれぞれで座標表示せよ。変わるものと変わらないものも述べよ。

Correct

標準基底では

$$[v]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。$v = a(1,1)^T + b(1,-1)^T$ とおくと

$$a + b = 3, \qquad a - b = 1$$

なので $a = 2, b = 1$ である。したがって

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。ベクトル v そのものは変わらないが、基底を変えると座標は変わる。

この問題は、基底が「ベクトルを測る物差し」であることを確認する。対象のベクトルは同じでも、物差しが変われば座標表示は変わる。

7.8 問題 13

$0_{2\times3}$ を $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の零写像の行列と見る。$\operatorname{rank} 0_{2\times3}$、列空間、$\ker 0_{2\times3}$ の次元を求め、階数-退化次数定理を確認せよ。

Correct

すべての列が零ベクトルなので、

$$\operatorname{rank} 0_{2\times3} = 0$$

である。列空間は $\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ である。また任意の $x \in \mathbb{R}^3$ に対して $0_{2\times3}x = 0$ なので、

$$\ker 0_{2\times3} = \mathbb{R}^3, \qquad \dim\ker 0_{2\times3} = 3$$

である。したがって

$$\operatorname{rank} 0_{2\times3} + \dim\ker 0_{2\times3} = 0 + 3 = 3$$

となり、入力空間の次元と一致する。

この問題は、階数の境界例である。零写像は出力側に何も残さず、入力の全体を核へ送る。

7.9 問題 14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [a_1 \ \ a_2 \ \ a_3]$$

について、$Ac = 0$ を解き、列ベクトルの一次関係を読み取れ。また、列空間の基底を 1 つ選べ。

Correct

$a_3 = a_1 + a_2$ なので、

$$a_1 + a_2 - a_3 = 0$$

である。したがって

$$c = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が $Ac = 0$ の解である。非自明解があるので、列ベクトルは一次従属である。列空間の基底として a_1, a_2 を取れる。

この問題は、$Ac = 0$ が列ベクトルの一次関係を表すことを具体的に確認する。非自明な c が見つかることは、列の中に余分な方向があることを意味する。

7.10 問題 15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について、$b_1 = (3,6)^T$ と $b_2 = (3,7)^T$ のそれぞれに対して、$Ax = b$ の解の有無を $\mathrm{rank}\, A$ と $\mathrm{rank}(A \mid b)$ の比較で判定せよ。

Correct

A の第 2 行は第 1 行の 2 倍なので、

$$\mathrm{rank}\, A = 1$$

である。$b_1 = (3,6)^T$ では右辺も同じ 2 倍の関係を満たすので、

$$\mathrm{rank}(A \mid b_1) = 1$$

である。したがって $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}(A \mid b_1)$ であり、解は存在する。ただし未知数は 2 個で階数は 1 なので、自由変数が 1 個あり、解は無限に存在する。

$b_2 = (3,7)^T$ では右辺が 2 倍の関係を満たさない。実際、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、矛盾行が現れる。したがって

$$\mathrm{rank}(A \mid b_2) = 2$$

であり、$\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}(A \mid b_2)$ なので解は存在しない。

この問題は、階数を単に列の独立性の数として求めるだけでなく、連立一次方程式の解の分類に使う練習である。係数行列と拡大係数行列の階数が一致するかが存在を決め、さらに階数が未知数の個数に等しいかが一意性を決める。

---

8 関連講義

→ 講義 **線型結合と張る空間の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/

→ 講義 **ベクトル空間と基底** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

→ 講義 **階数の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/

→ 講義 **列ベクトルの独立性と階数への橋渡し** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列ベクトルの独立性と階数への橋渡し-講義/