二次形式・最小多項式・ジョルダン-基本演習

→ 講義 二次形式と正定値行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/二次形式と正定値行列-講義/

→ 講義 最小多項式の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小多項式の基本-講義/

→ 講義 ジョルダン標準形の入口 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ジョルダン標準形の入口-講義/

1 演習方針

二次形式は、方向ごとの符号と伸縮を調べる道具である。最小多項式とジョルダン標準形は、固有値だけでは見えない「対角化できない成分」を記録する。

---

2 問題 1

$$q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

の正定値性を判定せよ。

2.1 解答例

Correct

対応する対称行列は

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。固有値は 3 と 1 で、どちらも正である。したがって q は正定値である。

2.2 解説

二次形式を固有方向に沿って読むと、平方の和に分解できる。係数である固有値がすべて正なら、零でない入力に対して正になる。

---

3 問題 2

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 3y^2 - z^2$$

を対称行列で表し、正定値・非負定値・不定のどれであるかを判定せよ。

3.1 解答例

Correct

対応する対称行列は

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。$x = 1, y = 0, z = 0$ では $q(1, 0, 0) = 2 > 0$ であり、$x = 0, y = 0, z = 1$ では $q(0, 0, 1) = -1 < 0$ である。したがって q は不定である。

3.2 解説

正定値性は全ての非零ベクトルで正になることを要求する。正になる方向と負になる方向が両方あれば不定である。

4 問題 3

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について、最小多項式が $(t - 1)^2$ であることを説明せよ。

4.1 解答例

Correct

$$J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

だが、

$$(J - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。したがって J を零行列にする最低次数の首一多項式は $(t - 1)^2$ である。

4.2 解説

固有値だけなら $(t - 1)$ で足りそうに見える。しかし $J - I \neq 0$ なので、非対角成分が残っている。この残りがジョルダン標準形で扱う情報である。

5 問題 4

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の最小多項式を求め、特性多項式だけでは区別できない情報を説明せよ。

5.1 解答例

Correct

$D - I = 0$ なので

$$m_D(t) = t - 1$$

である。E では $(E-I)(E-2I) = 0$ であり、どちらか 1 つの因子だけでは零行列にならないので

$$m_E(t) = (t-1)(t-2)$$

である。J では $J - I \neq 0$ だが $(J-I)^2 = 0$ なので

$$m_J(t) = (t-1)^2$$

である。

5.2 解説

D と J はどちらも特性多項式が $(t-1)^2$ である。しかし D は対角行列で、J は対角化可能ではない。最小多項式は、この違いを重根の有無として記録する。

---

6 問題 5

$N = A - \lambda I$ が 4 次元の空間で冪零に作用し、

$$\dim\ker N = 2, \qquad \dim\ker N^2 = 3, \qquad \dim\ker N^3 = 4$$

であるとする。λ に対するジョルダンブロックの大きさを求めよ。

6.1 解答例

Correct

$\dim\ker N$ はジョルダンブロックの個数を表すので、ブロックは 2 個である。差を取ると、

$$2, \quad 1, \quad 1$$

となる。これは、大きさ 1 以上のブロックが 2 個、大きさ 2 以上のブロックが 1 個、大きさ 3 以上のブロックが 1 個であることを意味する。したがってブロックの大きさは 3 と 1 である。

6.2 解説

核の次元の増え方は、ジョルダン鎖がどこまで続くかを表す。これは、一般化固有ベクトルが N を作用させるたびに鎖を 1 段ずつ下りるためである。

---

7 問題 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について、$N = A - 2I$ とおく。$\ker N$、$\ker N^2$、$\ker N^3$ を求め、一般化固有ベクトルのジョルダン鎖を 1 つ作れ。また、e^{tA} を求めよ。

7.1 解答例

Correct

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、$N(x, y, z)^T = (y, z, 0)^T$ である。したがって

$$\ker N = \mathrm{span}(e_1), \qquad \ker N^2 = \mathrm{span}(e_1, e_2), \qquad \ker N^3 = \mathbb{R}^3$$

である。また

$$Ne_1 = 0, \qquad Ne_2 = e_1, \qquad Ne_3 = e_2$$

なので、e_1, e_2, e_3 は長さ 3 のジョルダン鎖を作る。

$A = 2I + N$、$N^3 = 0$ より、

$$e^{tA} = e^{2t}\left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

7.2 解説

固有ベクトルだけでは足りない場合、一般化固有ベクトルが不足する方向を補う。冪零成分は、e^{tA} に多項式的な因子を生む。

---

8 関連演習

→ 基本演習 固有値・対角化・発展 exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/固有値・対角化・発展-基本演習/

→ 基本演習 SVD と擬似逆 exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/SVD と擬似逆-基本演習/

9 関連講義

→ 講義 二次形式と正定値行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/二次形式と正定値行列-講義/

→ 講義 最小多項式の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小多項式の基本-講義/

→ 講義 ジョルダン標準形の入口 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ジョルダン標準形の入口-講義/