内積・直交・射影-基本演習

→ 講義 内積空間の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 直交化の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交化の基本-講義/

→ 講義 直交補空間と射影 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交補空間と射影-講義/

1 演習方針

内積は、ベクトル空間に長さと角度を入れる道具である。射影は「届かない点を、部分空間の中で最も近い点へ落とす」操作である。この演習では、計算の前に直交性と零ベクトルの扱いを確認する。

2 問題 1

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

について、$\langle u, v \rangle$、$\| u \|$、$\| v \|$ を求め、u と v が直交するかを判定せよ。

2.1 解答例

Correct

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 3 + 2(-1) = 1$$

$$\| u \| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \qquad \| v \| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$\langle u, v \rangle \neq 0$ なので直交しない。

2.2 解説

内積が 0 であることは、角度が直角であることを表す。ここでは値が 1 なので、完全には直交していない。直交性は成分の見た目ではなく、内積で判定する。

3 問題 2

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について、$\| a+b \| = \| a \| + \| b \|$ が成り立つことを確認し、なぜ等号が成り立つかを説明せよ。

3.1 解答例

Correct

$$\| a+b \| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3$$

また $\| a \| = 1$、$\| b \| = 2$ なので、

$$\| a+b \| = 3 = \| a \| + \| b \|$$

である。a と b は同じ向きなので等号が成り立つ。

3.2 解説

三角不等式は、遠回りしても直線距離より短くならないことを表す。等号が成り立つのは、2本のベクトルが同じ方向を向く境界例である。不等式では等号成立条件まで確認する。

---

4 問題 3

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に Gram-Schmidt の直交化(orthogonalization)を行え。

4.1 解答例

Correct

まず

$$u_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。つぎに

$$u_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

4.2 解説

射影係数では $\langle u_1, u_1 \rangle$ で割るため、$u_1 \neq 0$ の確認が必要である。ここでは $\langle u_1, u_1 \rangle = 2 \neq 0$ なので割ってよい。直交化(orthogonalization)は、x_2 から u_1 方向の成分(component)を引き、u_1 に垂直な残差を取り出す操作(operation)である。

5 問題 4

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、y の $\mathrm{span}(u)$ への正射影を求めよ。

5.1 解答例

Correct

$$\mathrm{proj}_u\, y = \frac{\langle y, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

5.2 解説

射影は、y を u 方向の成分と、それに直交する残差に分解する。分母 $\langle u, u \rangle$ は $u \neq 0$ なら正である。もし $u = 0$ なら、$\mathrm{span}(u)$ は零空間だけであり、この公式は 0 除算になるので使えない。

---

6 問題 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について、$Ax = b$ の最小二乗解を求め、射影との関係を説明せよ。

6.1 解答例

Correct

正規方程式は

$$A^T A x = A^T b$$

である。$A^T A = 2$、$A^T b = 2$ なので $x = 1$ である。したがって近似ベクトルは

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

6.2 解説

b は $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ に属さないので、$Ax = b$ は厳密には解けない。最小二乗法は、b に最も近い列空間の点を選ぶ方法である。$A^T A = 2 \neq 0$ なので、この例では正規方程式を一意に解ける。

7 問題 6

$\mathbb{R}^2$ で

$$\| x \|_1 = |x_1| + |x_2|, \qquad \| x \|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

と定義する。これらがノルムの条件を満たすことを確認せよ。

7.1 解答例

Correct

どちらも値は 0 以上であり、0 になるのは $x_1 = x_2 = 0$ のときだけである。

スカラー c について

$$\| cx \|_1 = |c| \| x \|_1, \qquad \| cx \|_\infty = |c| \| x \|_\infty$$

である。

また

$$\| x + y \|_1 = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \le |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = \| x \|_1 + \| y \|_1$$

である。さらに

$$|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le \| x \|_\infty + \| y \|_\infty$$

が $i = 1, 2$ で成り立つので、

$$\| x + y \|_\infty \le \| x \|_\infty + \| y \|_\infty$$

である。

7.2 解説

ノルムは長さの抽象化である。形が標準の $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ と違っても、非負性、同次性、三角不等式を満たせばノルムである。この問題は、定義に戻って判定する練習である。

---

8 問題 7

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

について、(u, v) と (u, w) のそれぞれでコーシー・シュワルツの不等式の等号が成り立つかを判定せよ。

8.1 解答例

Correct

$v = 2u$ なので、u と v は一次従属である。したがって

$$|\langle u, v \rangle| = \| u \| \| v \|$$

が成り立つ。
一方、w は u の定数倍ではないので、u と w は一次独立である。したがって等号は成り立たない。

8.2 解説

コーシー・シュワルツの不等式では、値を計算するだけでなく、等号成立条件が重要である。等号は 2 本のベクトルが同じ直線の上にあるとき、つまり一次従属のときに成り立つ。

---

9 問題 8

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とする。$y = (1,2,3)^T$ の U への正射影を求め、$U^\perp$ の基底を 1 つ求めよ。

9.1 解答例

Correct

$u_1 = (1,1,0)^T$、$u_2 = (1,0,1)^T$ とし、射影を $p = au_1 + bu_2$ とおく。$y - p$ が u_1, u_2 に直交するので、

$$2a + b = 3, \qquad a + 2b = 4$$

を得る。これを解くと

$$a = \frac{2}{3}, \qquad b = \frac{5}{3}$$

である。したがって

$$p = \frac{2}{3}u_1 + \frac{5}{3}u_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

である。また $n = (1,-1,-1)^T$ は u_1, u_2 の両方に直交するので、$U^\perp$ の基底として $\{n\}$ を取れる。

9.2 解説

2 次元の部分空間への射影では、残差が部分空間のすべての方向に直交するように係数を決める。この問題は、射影を「近い点を探す」問題から、直交条件の連立方程式へ変換する練習である。

---

10 問題 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

について、正規方程式を解いて最小二乗解を求め、残差が列空間に直交することを確認せよ。

10.1 解答例

Correct

$$A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A^Tb = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\alpha = \frac{7}{6}, \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

である。よって最小二乗解は $(7/6, 1/2)^T$ である。
残差は

$$r = b - A\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

であり、

$$A^Tr = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので、残差は列空間に直交する。

10.2 解説

最小二乗法では、b そのものを列空間に入れるのではなく、b に最も近い列空間の点を探す。残差が列空間に直交することが、最短距離になっている理由である。

11 問題 10

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により

$$\langle x, y \rangle_M = x^TMy$$

と定義する。これが $\mathbb{R}^2$ の内積であることを確認せよ。

11.1 解答例

Correct

M は対称行列なので、

$$\langle x, y\rangle_M = \langle y, x\rangle_M$$

である。また $x = (x_1, x_2)^T$ について

$$\langle x, x\rangle_M = 2x_1^2 + x_2^2$$

であり、これは常に 0 以上で、0 になるのは $x = 0$ のときだけである。加法性と同次性は行列積の分配法則から従う。したがって内積である。

11.2 解説

標準内積だけが内積ではない。正定値な対称行列を使うと、方向ごとの重みを変えた内積を作れる。

---

12 問題 11

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

により $x^T N y$ と定義したものが内積ではないことを説明せよ。

12.1 解答例

Correct

$e_2 = (0, 1)^T$ とすると、

$$e_2^T N e_2 = -1$$

である。内積なら $\langle x, x\rangle \geq 0$ でなければならないので、これは正定値性に反する。したがって内積ではない。

12.2 解説

双線型に見える式でも、長さの二乗に対応する $\langle x, x\rangle$ が負になるなら内積ではない。内積の判定では、正定値性の境界例を必ず確認する。

---

13 問題 12

$\mathbb{C}$ で

$$(z, w) = zw$$

と定義したものが、複素内積ではないことを説明せよ。

13.1 解答例

Correct

$z = i$ とすると、

$$(i, i) = i^2 = -1$$

である。複素内積なら $\langle z, z \rangle$ は 0 以上の実数でなければならない。したがって、この定義は複素内積ではない。

13.2 解説

複素の場合に共役を忘れると、長さの二乗が負になったり複素数になったりする。複素内積で共役対称性を要求する理由はここにある。

---

14 問題 13

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について、$\| u + v \| < \| u \| + \| v \|$ と $\| u + w \| = \| u \| + \| w \|$ を確認し、等号が成り立つ場合と成り立たない場合の違いを説明せよ。

Correct

$$\| u + v \| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} < 2 = \| u \| + \| v \|$$

である。一方、

$$\| u + w \| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3 = \| u \| + \| w \|$$

である。u と v は直交しており、同じ方向を向いていない。u と w は正の定数倍の関係にあるため、同じ向きの直線上に並ぶ。

この問題は、三角不等式の境界例を確認する。零ベクトルを除けば、等号は 2 本のベクトルが正の定数倍になっている場合に現れる。向きが違う場合は、折れ線の長さが直線距離より長くなる。

---

15 関連講義

→ 講義 ノルムと三角不等式 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ノルムと三角不等式-講義/

→ 講義 内積空間の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 直交化の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交化の基本-講義/

→ 講義 直交補空間と射影 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交補空間と射影-講義/

→ 講義 最小二乗法の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小二乗法の基本-講義/

16 関連演習（かんれんえんしゅう）

→ 基本演習 複素内積とユニタリ行列 exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-基本演習/