

列基本変形と未知数変換-基本演習

elementary column operation change of variables

→ [講義](#) [列基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列基本変形の基本-講義/>

→ [講義](#) [行基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/>

→ [講義](#) [単位行列・零行列・転置の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/>

1 演習方針

列基本変形は、行列の列を別の生成系に取り替える操作である。列空間と階数は保存されるが、 $Ax = b$ の未知数は同じ意味では読めなくなる。

2 問題 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

に $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ を行う。この操作を右から掛ける基本行列 F で表し、 $Ax = b$ と $AFy = b$ の未知数の関係を述べよ。

2.1 解答例

Correct

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$AF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

である。 $AFy = b$ は $A(Fy) = b$ を意味するので、元の未知数は

$$x = Fy = \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

である。

2.2 解説

列基本変形は列空間を保存するが、未知数の座標を変える。方程式として追跡するなら、 $x = Fy$ を同時に記録する。

3 問題 2

同じ A に対して、つぎの列基本変形を右からの基本行列で表せ。

- $C_1 \leftrightarrow C_2$
- $C_2 \leftarrow 3C_2$

3.1 解答例

Correct

列の交換は

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で表され、

$$AF_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

である。列の非零定数倍は

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

で表され、

$$AF_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

である。

3.2 解説

右から掛ける基本行列の各列が、新しい列を元の列の線型結合として指定する。このため、列への操作は右からの積で表される。

4 問題 3

行列 A に行基本変形 $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$ を行って B を得る。このとき B^T は A^T にどの基本変形を行ったものか述べよ。

4.1 解答例

Correct

A の第 2 行が、第 2 行と第 1 行の 3 倍の和に変わる。これを転置すると、 A^T の第 2 列が、第 2 列と第 1 列の 3 倍の和に変わる。したがって

$$C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$$

である。

4.2 解説

転置は行と列を入れ替える。行への操作は、転置後には列への操作として読み替えられる。

5 問題 4

つぎの説明の誤りを指摘せよ。

「列基本変形では階数が保存されるので、 $Ax = b$ と $AFx = b$ は同じ解集合を持つ。」

5.1 解答例

Correct

階数の保存は、列空間の生成の仕方が変わるだけであることを意味する。しかし $AFx = b$ は $A(Fx) = b$ であり、 x の意味は元の方程式と違う。したがって、同じ解を比べるには $z = Fx$ のような未知数変換を追跡する必要がある。

5.2 解説

行基本変形は解集合を保存し、列基本変形は列空間と階数を保存する。似た操作でも保存する対象が違う。

6 関連演習

→ [基本演習](#) [基本変形と連立一次方程式](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/基本変形と連立一次方程式-基本演習/>

→ [基本演習](#) [階段形と掃き出し法](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/階段形と掃き出し法-基本演習/>

7 関連講義

→ [講義](#) [列基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列基本変形の基本-講義/>

→ [講義](#) [行基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/>

→ [講義](#) **単位行列・零行列・転置の基本** [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/>