固有値・対角化・発展-基本演習

→ 講義 固有値と固有ベクトル lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/

→ 講義 対角化の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/

→ 講義 対称行列と直交対角化 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対称行列と直交対角化-講義/

1 演習方針

固有ベクトルは、線型変換で向きが変わらない方向である。対角化は、空間をその方向ごとに分解し、線型変換を倍率だけに単純化する。

二次形式、最小多項式、ジョルダン標準形、SVD、擬似逆行列は関連演習に分割している。

---

2 問題 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求め、幾何的な意味を述べよ。

2.1 解答例

Correct

固有値は 2 と 3 である。$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは e_1 の非零な倍、$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは e_2 の非零な倍である。

2.2 解説

A は x 軸方向を 2 倍、y 軸方向を 3 倍に伸ばす。軸の向きは変わらないので、標準基底がそのまま固有ベクトルになる。零ベクトルは方向を表さないため、固有ベクトルには含めない。

---

3 問題 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が対角化可能かを判定せよ。

3.1 解答例

Correct

固有値は $\lambda = 1$ だけである。

$$B - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので、固有空間は $y = 0$、つまり e_1 の張る 1 次元の空間である。2×2 行列を対角化するには一次独立な固有ベクトルが 2 本必要なので、B は対角化可能ではない。

3.2 解説

固有値を求めるだけでは不十分である。対角化には、空間全体を固有ベクトルの基底で埋める必要がある。

---

4 問題 3

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を直交対角化せよ。

4.1 解答例

Correct

固有値は 3 と 1 である。対応する単位固有ベクトルとして

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を取れる。したがって、

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$Q^T C Q = D$$

である。

4.2 解説

C は対称行列なので、異なる固有値に属する固有ベクトルを直交に選べる。直交行列による基底変換は長さと角度を保存する。

---

5 問題 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を対角化し、A^n を求めよ。

5.1 解答例

Correct

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $(1,0)^T$、$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $(1,1)^T$ と取れる。したがって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると $A = PDP^{-1}$ である。よって

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

である。

5.2 解説

対角化は、累乗を固有方向ごとの倍率の累乗へ分解する道具である。

6 問題 5

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t), \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を解け。

6.1 解答例

Correct

第 1 成分は $x_{(1)'}(t) = x_1(t)$、第 2 成分は $x_{(2)'}(t) = -2x_2(t)$ を満たす。したがって

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

である。

6.2 解説

固有値は時間発展の伸び方を決める。この例では、第 1 方向は e^t で増加し、第 2 方向は e^{-2t} で減衰する。

7 関連演習

かんれんえんしゅう

→ 基本演習 二次形式・最小多項式・ジョルダン exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/二次形式・最小多項式・ジョルダン-基本演習/

→ 基本演習 SVD と擬似逆 exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/SVD と擬似逆-基本演習/

→ 基本演習 複素内積とユニタリ行列 exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-基本演習/

8 関連講義

かんれんこうぎ

→ 講義 固有値と固有ベクトル lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/

→ 講義 対角化の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/

→ 講義 対称行列と直交対角化 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対称行列と直交対角化-講義/