基底変換と相似-基本演習

→ 講義 基底変換と相似 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/基底変換と相似-講義/

→ 講義 線型写像と行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

1 演習方針

基底変換で変わるのは、ベクトルそのものや線型写像そのものではなく、座標表示である。この演習では、古い基底での座標、新しい基底での座標、表現行列を区別して計算する。

---

2 確認問題：座標変換行列

$\mathbb{R}^2$ の標準基底を古い基底とする。新しい基底を

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする。ベクトル

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の新基底に関する座標 $[x]_{\mathrm{new}}$ を求めよ。

2.1 解答

まず、新しい基底ベクトルを列に並べる。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

この P は、新しい座標を古い座標へ戻す行列である。

$$[x]_{\mathrm{old}} = P[x]_{\mathrm{new}}$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。成分を比べると、

$$\begin{cases} s + t = 3, \\ s - t = 1 \end{cases}$$

である。2 式を足して $2s = 4$、したがって $s = 2$ である。さらに $s + t = 3$ から $t = 1$ である。

$$\boxed{[x]_{\mathrm{new}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

この問題で確認しているのは、座標が変わってもベクトルそのものは変わらないという点である。x は同じベクトルだが、基底を変えると数の組み合わせが変わる。

---

3 確認問題： 相似変換

線型写像の古い基底での 表現行列 を

$$A_{\mathrm{old}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とする。また、 新しい基底から古い基底への座標変換行列を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。新基底での 表現行列

$$A_{\mathrm{new}} = P^{-1} A_{\mathrm{old}} P$$

を求めよ。

3.1 解答

まず P が可逆であることを確認する。ここでは

$$\det P = -2 \neq 0$$

なので、P^{-1} が存在する。したがって

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。つぎに

$$A_{\mathrm{old}} P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$A_{\mathrm{new}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\boxed{A_{\mathrm{new}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

この問題では、左 の P^{-1} と右の P の役割が 重要 である。右の P は新座標の 入力 を古座標へ戻し、A_{old} は古座標で線型写像を適用し、 左 の P^{-1} は結果を新座標へ戻す。

---

4 確認問題：定義域と終域の基底を別々に変える

線型写像 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ の古い基底での表現行列を

$$A_{\text{old}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。定義域の座標変換行列を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし、終域の座標変換行列を $Q = I_3$ とする。このとき

$$A_{\text{new}} = Q^{-1} A_{\text{old}} P$$

を求めよ。

4.1 解答

ここでは $Q = I_3$ なので、$Q^{-1} = I_3$ である。したがって

$$A_{\text{new}} = A_{\text{old}} P$$

を計算すればよい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\boxed{A_{\text{new}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

長方行列では、相似という形ではなく $Q^{-1}AP$ という形になる。定義域と終域の基底を別々に持つためである。

---

5 確認問題：相似で保存される量

前問の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について、トレース、行列式、固有値が一致することを確認せよ。

5.1 解答

まずトレースは

$$\operatorname{tr}(A) = 2 + 3 = 5, \qquad \operatorname{tr}(B) = 3 + 2 = 5$$

である。つぎに行列式は

$$\det A = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 6, \qquad \det B = 3 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) = 6$$

である。さらに、どちらも上三角行列なので、固有値は対角成分から読める。

$$A : 2, 3, \qquad B : 3, 2$$

したがって、順序を除けば固有値は一致する。
この問題で見ているのは、相似が同じ線型写像の 別表示 であるという事実である。行列の成分は変わっても、基底に依存しない量は保存される。

---

6 確認問題：可逆性の確認

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

を座標変換行列として使えるか判定せよ。

6.1 解答

基底変換で使う P は、新しい基底ベクトルを列に並べた行列である。したがって、列が線型独立でなければならない。
ここでは第 2 列が第 1 列の 2 倍である。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

したがって列は線型従属であり、基底にならない。実際、

$$\det P = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

である。逆行列の公式を使うなら $\det P$ で割るため、この場合は 0 による除算になり、P^{-1} は存在しない。

$$\boxed{P \text{ は座標変換行列として使えない}}$$

この問題は、相似変換や基底変換で P^{-1} が出てくる理由を確認するものである。可逆でない行列は、座標の付け替えではなく、情報を潰す写像になる。

---

7 補充問題：失敗例と順序の確認

7.1 問題 6

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^2$ の基底ではない。この理由を、座標変換行列の可逆性から説明せよ。

Correct

b_1, b_2 を列に並べると

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。この行列は第 2 行が零なので可逆ではない。したがって、座標からベクトルを一意に復元できず、b_1, b_2 は基底ではない。

この問題は、基底ではない組を使うと座標変換が壊れることを確認する。基底変換では、変換行列が可逆であることが前提である。

7.2 問題 7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。$P^{-1}AP$ と PAP^{-1} を計算し、一般に順序を入れ替えてはいけないことを確認せよ。

Correct

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である。一方、

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

であり、同じ行列にはならない。

この問題は、相似変換の順序を確認するための失敗例である。$P^{-1}AP$ と PAP^{-1} は記号が似ているが、基底の取り方に対する意味が逆になる。

---

8 関連講義

→ 講義 **線型性の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

→ 講義 **複素内積とユニタリ行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 **基底変換と相似** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/基底変換と相似-講義/

---

9 まとめ

- 基底変換では、ベクトルそのものではなく 座標表示 が変わる。
- 相似変換 $P^{-1}AP$ は、同じ線型写像を別の基底で表す操作である。
- 定義域と終域の基底を別々に変えるときは、$Q^{-1}AP$ の形になる。
- P^{-1} を使う場面では、P が可逆であることを確認する。