基本変形と連立一次方程式-基本演習

→ 講義 **連立一次方程式と拡大係数行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と拡大係数行列-講義/

→ 講義 **行基本変形の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/

→ 講義 **列基本変形の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列基本変形の基本-講義/

→ 講義 **連立一次方程式と掃き出し法** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/

1 演習方針

行基本変形は方程式を同値に変形するので、解集合を保存する。列基本変形は列空間と階数を保存するが、未知数の意味を変える。

このファイルでは入口として、何を保存し何を変えるかを確認する。階段形、掃き出し、列基本変形の詳細は関連演習へ分割している。

---

2 問題 1

連立一次方程式

$$
\begin{cases} x+2y=5, \\ 3x+4y=11 \end{cases}
$$

を拡大係数行列で表し、行基本変形で解け。

2.1 解答例

Correct

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

したがって $x=1$、$y=2$ である。

2.2 解説

行基本変形は、方程式どうしを入れ替える、非零定数倍する、一方に他方の倍を加える操作である。いずれも逆操作を持つので、解集合を変えない。

---

3 問題 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

が表す連立一次方程式に解があるかを判定せよ。

3.1 解答例

Correct

第 2 行は

$$0x + 0y = 3$$

を表す。これは成り立たないので、解は存在しない。

3.2 解説

零行と矛盾行を区別する。すべての係数が 0 で右辺も 0 なら条件を追加しないが、右辺が 0 でなければ矛盾である。

---

4 問題 3

3 種類の行基本変形を列挙し、それぞれが何を保存するかを述べよ。

4.1 解答例

Correct

3 種類は、行の交換、行の非零定数倍、ある行に別の行の定数倍を加える操作である。

いずれも解集合を保存する。

4.2 解説

0 倍は行基本変形ではない。0 倍すると行の情報が消え、元に戻せないからである。非零の定数で割る場合は、その定数が 0 でないことが前提である。

---

5 問題 4

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

に列基本変形 $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ を行う。新しい行列を求め、この操作が列空間と $Ax=b$ に対して何を変えるかを説明せよ。

5.1 解答例

Correct

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

になる。列基本変形は列空間と階数を保存する。しかし $Ax=b$ の未知数の意味はそのままでは保存されない。

5.2 解説

列基本変形は、列ベクトルの生成系を別の生成系に取り替える操作である。到達できる出力の集合は変わらないが、各未知数が担当する方向は変わる。

---

6 問題 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から解集合を読み取れ。

6.1 解答例

Correct

ピボットは第 1 列と第 2 列にある。したがって x_1, x_2 が主変数、x_3 が自由変数である。$x_3 = t$ とおくと、

$$x_2 = 4 - 3t, \qquad x_1 = -8 + 7t$$

である。したがって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である。

6.2 解説

階段形は、解の構造を読むための形である。ピボットがない列は自由変数を表し、零行は条件を追加しない。

---

7 問題 6

つぎの説明の誤りを指摘せよ。

「A に列基本変形を行って AF にしても階数は変わらない。したがって $Ax = b$ と $AFx = b$ は同じ解集合を持つ。」

7.1 解答例

Correct

階数が保存されることと、解集合が同じであることは別である。$AFx = b$ は $A(Fx) = b$ を意味するので、元の未知数を $z = Fx$ と置けば $Az = b$ になる。したがって、解を比較するには未知数変換を追跡する必要がある。

7.2 解説

行基本変形は方程式を同値に変形する。一方、列基本変形は入力側の座標を取り替える。この違いが、保存される対象の違いである。

---

8 関連演習

→ 基本演習 階段形と掃き出し法 exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/階段形と掃き出し法-基本演習/

→ 基本演習 列基本変形と未知数変換 exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/列基本変形と未知数変換-基本演習/

9 関連講義

→ 講義 連立一次方程式と拡大係数行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と拡大係数行列-講義/

→ 講義 行基本変形の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/

→ 講義 列基本変形の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列基本変形の基本-講義/

→ 講義 階段形と簡約階段形 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階段形と簡約階段形-講義/

→ 講義 連立一次方程式と掃き出し法 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/

→ 講義 **逆行列の計算手順** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の計算手順-講義/