行列式と可逆性-基本演習

→ 講義 行列式の計算規則 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式の計算規則-講義/

→ 講義 余因子展開と可逆性の判定 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/余因子展開と可逆性の判定-講義/

→ 講義 行列式 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式-講義/

1 演習方針

行列式は、正方行列が体積をどれだけ伸縮し、向きを保つか反転するかを表す。計算では、行や列の操作が行列式を変えるか変えないかを必ず追跡する。

---

2 問題 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

の行列式を求め、幾何的な意味を述べよ。

2.1 解答例

Correct

$$\det A = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$$

したがって、この線型変換は面積を 1 倍に保ち、向きも反転しない。

2.2 解説

2×2 行列の行列式は、2 本の列ベクトルが作る平行四辺形の向き付き面積である。値が 1 であることは、見た目の形は変わっても面積が保存されることを意味する。

---

3 問題 2

$\det A = 6$ とする。次の操作の後で行列式がどう変わるかを答えよ。

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$
2. $R_3 \leftarrow 4R_3$
3. $R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1$

3.1 解答例

Correct

1. -6
2. 24
3. 6

3.2 解説

行の交換は向きを反転するので符号を変える。行の定数倍は、その方向の伸縮率だけ体積を変える。他の行の倍を加える操作は、平行に押し傾けるだけなので体積を変えない。操作の結果だけでなく、何が保存されるかを確認する問題である。

---

4 問題 3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

の行列式を、第2 列に沿って余因子展開して求めよ。

4.1 解答例

Correct

第2 列は $0, 0, 5$ なので、

$$\det B = 5(-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -5(4-6) = 10$$

4.2 解説

余因子展開では、0 が多い行または列を選ぶと計算量が減る。第2 列を選んだ理由は、非零の項が 1 個だけだからである。符号 $(-1)^{i+j}$ の確認を省略すると、値の符号を誤りやすい。

---

5 問題 4

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は可逆か。理由を述べよ。

5.1 解答例

Correct

可逆ではない。三角行列なので、

$$\det C = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

である。したがって逆行列は存在しない。

5.2 解説

正方行列では、$\det C \neq 0$ と可逆であることは同値である。この問題では対角成分に 0 があるため、体積が 0 倍に潰れる。情報が失われるので入力を一意に復元できない。

---

6 問題 5

次の主張が正しいかを判定せよ。

「A が正方行列で、同じ行をもつなら $\det A = 0$ である。」

6.1 解答例

Correct

正しい。

6.2 解説

同じ行が 2 本あると、行ベクトルが一次従属になる。幾何的には、互いに独立な方向が不足するため、体積が 0 になる。行交換で符号が反転する一方、同じ行を交換しても行列は変わらない。したがって $\det A = -\det A$ となり、$\det A = 0$ である。

---

7 補充問題：行列式の計算と可逆性

7.1 問題 6

$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を計算せよ。

Correct

$4 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 10$ である。

7.2 問題 7

2 行を交換したとき、行列式がどう変化するか述べよ。

Correct

符号が反転する。

7.3 問題 8

2 列を交換したとき、行列式がどう変化するか述べよ。

Correct

符号が反転する。

7.4 問題 9

行列式が 0 になる 2×2 行列を 1 つ構成せよ。

Correct

たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

は 2 行目が 1 行目の 2 倍なので行列式は 0 である。

7.5 問題 10

第二列に零が多い 3×3 行列を余因子展開で計算せよ。

Correct

たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

なら、第二列で展開すると

$$\det A = 5(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 20$$

である。

7.6 問題 11

余因子の符号を 3×3 の表で書け。

Correct

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

7.7 問題 12

$\det A = 0$ のとき、A^{-1} が存在しない理由を説明せよ。

Correct

$\det A = 0$ は線型変換が体積を 0 倍に潰すことを意味する。情報が失われるため、出力から入力を一意に復元できず、A^{-1} は存在しない。

7.8 問題 13

列ベクトル a, b, c について

$$\det(a, b, c) = 5$$

であるとする。多重線型性と交代性だけを使って、次を求めよ。

1. $\det(a + 2b, b, c)$
2. $\det(2a, c, b)$
3. $\det(a, b, a + c)$

Correct

多重線型性より

$$\det(a + 2b, b, c) = \det(a, b, c) + 2\det(b, b, c) = 5$$

である。2 本の列が一致する項は 0 になる。

第 2 式では

$$\det(2a, c, b) = 2\det(a, c, b) = -2\det(a, b, c) = -10$$

である。b と c を交換すると符号が反転する。

第 3 式では

$$\det(a, b, a + c) = \det(a, b, a) + \det(a, b, c) = 5$$

である。

この問題は、行列式を公式に代入するだけでなく、列に関する線型性と「同じ列が 2 本あると 0」という原理から値を読む練習である。

7.9 問題 14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

について、B が A^{-1} であることを AB と BA の両方を計算して確認せよ。

Correct

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって $B = A^{-1}$ である。

この問題は、逆行列が片側だけの記号操作ではなく、左右から掛けて単位行列を返す行列であることを確認する。

7.10 問題 15

問題 14 の A について、

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

とする。$Ax = b$ を $x = A^{-1}b$ により解き、解が一意である理由を述べよ。

Correct

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。A が可逆なので、$Ax = b$ の解が 2 つあれば、その差は $A(x_1 - x_2) = 0$ を満たす。A^{-1} を掛けると $x_1 - x_2 = 0$ となるため、解は一意である。

この問題は、逆行列が連立一次方程式の一意解と結びつくことを確認する。

7.11 問題 16

$$A = (1 \ \ 0), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について、AB と BA を計算し、片側だけで単位行列になっても逆行列とは言えないことを説明せよ。

Correct

$$AB = (1) = I_1$$

である。一方、

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$$

である。したがって、B は A の両側の逆行列ではない。

この問題は、長方行列では片側逆が現れても、正方行列の逆行列と同じようには扱えないことを確認する。

7.12 問題 17

$\det A = 6$ とする。次の列操作の後で行列式がどう変化するかを答えよ。

1. $C_1 \leftrightarrow C_3$
2. $C_2 \leftarrow 3C_2$
3. $C_3 \leftarrow C_3 - 5C_1$

Correct

1. 列の交換なので -6。
2. 列の 3 倍なので 18。
3. 他列の倍を加える操作なので 6。

この問題は、行だけでなく列の基本変形でも行列式の変化を追跡できることを確認する。

7.13 問題 18

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式を、行基本変形による変化を追跡しながら求めよ。

Correct

まず $R_1 \leftrightarrow R_2$ とする。この交換で行列式の符号が反転する。

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

つぎの 2 つの行への加算は行列式を変えない。

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1, \qquad R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

したがって

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る。さらに $R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2$ とすると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。この定数倍では行列式が $\frac{1}{2}$ 倍になる。最後の三角行列の行列式は

$$1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

である。よって、定数倍の前の行列式は 4、最初の行交換の前の行列式は

$$\det A = -4$$

である。

この問題は、行基本変形を計算の道具として使うときに、交換、非零定数倍、他行の倍の加算がそれぞれ行列式をどう変えるかを同時に管理する練習である。

---

8 関連講義

→ 講義 **行列式の計算規則** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式の計算規則-講義/

→ 講義 **余因子展開と可逆性の判定** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/余因子展開と可逆性の判定-講義/

→ 講義 **行列式** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式-講義/

→ 講義 **逆行列の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の基本-講義/