# 行列計算と線型変換-基本演習

→ 講義 線型性の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/

→ 講義 行列の基本演算 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の基本演算-講義/

→ 講義 行列の積の意味 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の積の意味-講義/

→ 講義 単位行列・零行列・転置の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

## 1 演習方針

行列の計算では、成分を動かす前にサイズ条件を確認する。積 $AB$ は「まず $B$、つぎに $A$」という合成を表すので、順序を入れ替えると意味も結果も変わる。

---

## 2 確認問題：線型性の判定

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

で定義する。この $T$ が線型写像であることを、加法性と同次性を確認して示せよ。

### 2.1 解答例

**Correct**

$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$、$v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とする。まず加法性を確認する。

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2) \end{pmatrix}$$

一方、

$$T(u)+T(v) = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 2x_1-y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ 2x_2-y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2) \end{pmatrix}$$

である。したがって $T(u+v) = T(u) + T(v)$ である。

つぎにスカラー $c$ について同次性を確認する。

$$T(cu) = T\begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1+cy_1 \\ 2cx_1-cy_1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 2x_1-y_1 \end{pmatrix} = cT(u)$$

よって $T$ は線型写像である。

### 2.2 解説

この問題は、線型写像の定義そのものを確認している。加法性は「足してから写像で写す」と「写像で写してから足す」が一致すること、同次性は「スカラー倍してから写像で写す」と「写像で写してからスカラー倍する」が一致することである。

ここで重要なのは、いくつかの数値例で成り立つことを確かめるだけでは証明にならないという点である。任意の $u, v, c$ について確認しているため、定義に戻った証明になっている。

---

## 3 問題 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について、$A + B$ と $2A - B$ を求めよ。可能な理由も述べよ。

### 3.1 解答例

**Correct**

どちらも $2 \times 3$ 行列なので和と 差 が定義できる。

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

### 3.2 解説

行列の和は、同じ位置の成分どうしを足す操作である。そのため、 行数 と 列数 が一致していなければならない。この問題は、計算前に 定義条件 を確認する 習慣 を確認している。

---

## 4 問題 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について、$AB$ と $BA$ を求め、違いを説明せよ。

### 4.1 解答例

**Correct**

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

したがって $AB \neq BA$ である。

### 4.2 解説

$AB$ は右側の $B$ を先に適用し、その結果へ $A$ を適用する合成である。$BA$ は順序が逆である。線型変換では、先に横へ押してから伸ばす操作と、先に伸ばしてから横へ押す操作は一般に一致しない。

## 5 問題 3

線型変換 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad T(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。$T$ の標準基底に関する表現行列を求め、$T\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ を求めよ。

### 5.1 解答例

**Correct**

表現行列は、$T(e_1)$ と $T(e_2)$ を列に並べた

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって、

$$T\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

である。

### 5.2 解説

行列の列は、標準基底がどこへ移るかを記録している。$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4e_1 - 2e_2$ なので、線型性により $T(4e_1 - 2e_2) = 4T(e_1) - 2T(e_2)$ である。この問題は、行列積を列の線型結合として読むことを確認している。

## 6 問題 4

$A$ を $2 \times 3$ 行列、$B$ を $3 \times 4$ 行列とする。$AB$、$BA$、$A^T B$、$BA^T$ が定義できるかを判定せよ。

### 6.1 解答例

**Correct**

$AB$ は定義でき、サイズは $2 \times 4$ である。$BA$ は $3 \times 4$ と $2 \times 3$ の積なので定義できない。$A^T$ は $3 \times 2$ なので、$A^T B$ は $3 \times 2$ と $3 \times 4$ の積となり定義できない。$BA^T$ は $3 \times 4$ と $3 \times 2$ の積となり定義できない。

### 6.2 解説

行列積では、左の列数と右の行数が一致する必要がある。転置はサイズを入れ替えるので、転置後にもう一度サイズを確認する。境界で誤りやすいのは、記号だけを見て「なんとなく掛けられる」と判断することである。

---

## 7 問題 5

$A$ を $m \times n$ 行列とする。$AI_n = A$ と $I_m A = A$ の意味を、サイズと線型変換の両方から説明せよ。また、$A0$ と $0A$ が何を表すかも述べよ。

### 7.1 解答例

**Correct**

$I_n$ は $\mathbb{R}^n$ の恒等変換、$I_m$ は $\mathbb{R}^m$ の恒等変換である。したがって、$AI_n$ は $A$ の前に何もしない変換を挟むこと、$I_m A$ は $A$ の後に何もしない変換を挟むことを表す。どちらも $A$ である。零行列を掛けると、適切なサイズでは全てを零へ送る変換になる。

### 7.2 解説

単位行列は情報を変えない。零行列は入力の違いをすべて潰す。このため、単位行列は合成しても変換を保存するが、零行列は階数や核の性質を大きく変える。この問題は、操作が何を変え、何を変えないかを見分ける練習である。

---

# 8 補充問題：行列の演算と転置

## 8.1 問題 6

$2 \times 3$ 行列と $2 \times 3$ 行列の和が定義される理由を説明せよ。

**Correct**

行列の和は同じ位置の成分どうしを足すため、行数と列数が一致している必要がある。どちらも $2 \times 3$ なので定義できる。

## 8.2 問題 7

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して $-2A$ を計算せよ。

**Correct**

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

## 8.3 問題 8

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のサイズを比較せよ。

**Correct**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ は $1 \times 2$ 行列で、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $2 \times 1$ 行列である。

## 8.4 問題 9

$2 \times 3$ 行列と $3 \times 4$ 行列の積のサイズを答えよ。

**Correct**

内側のサイズ 3 が一致するので積は定義でき、サイズは $2 \times 4$ である。

## 8.5 問題 10

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$、$x = (3, 4)^T$ に対して $Ax$ を計算せよ。

**Correct**

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

## 8.6 問題 11

行列積が可換でない例を 1 つ構成せよ。

**Correct**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので $AB \neq BA$ である。

## 8.7 問題 12

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の $A^T$ を求めよ。

**Correct**

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

## 8.8 問題 13

$I_2 A = A$ が成立するための $A$ の 行数 を確認せよ。

**Correct**

$I_2$ は $2 \times 2$ 行列 なので、$I_2 A$ が定義されるには $A$ の 行数 が 2 である必要がある。

## 8.9 問題 14

$(AB)^T = B^T A^T$ で順序が反転する理由を言語化せよ。

**Correct**

$AB$ は「まず $B$、つぎに $A$」という 合成 を 表 す。転置すると 行 と 列 の役割が入れ替わるため、合成 を戻して読む順序は $B^T A^T$ になる。

## 8.10 問題 15

$A$ が $m \times n$ 行列のとき、$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$ となる理由を行空間と列空間の 対応 から説明せよ。

**Correct**

$A$ の行空間は $A^T$ の列空間に 対応 し、$A$ の列空間は $A^T$ の行空間に 対応 する。行階数と列階数は一致するので、$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$ である。

---

## 8.11 問題 16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

に行基本変形 $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$ を行って $B$ を得る。このとき $B^T$ は $A^T$ にどの列基本変形を行ったものか答えよ。

**Correct**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

なので

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

である。一方、

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

であり、$A^T$ の第 2 列に第 1 列の 3 倍を加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

になる。したがって、対応する列基本変形は $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$ である。

この問題は、転置が行の操作を列の操作へ翻訳することを確認している。

---

## 8.12 問題 17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

について、$A(Bx)$ と $(AB)x$ を計算し、同じ結果になることを確認せよ。

**Correct**

$$Bx = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

なので

$$A(Bx) = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

である。また

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

だから

$$(AB)x = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

である。

この問題は、行列積 $AB$ が「まず $B$、つぎに $A$」という合成を表すことを確認する。

## 8.13 問題 18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = [b_1 \;\; b_2]$$

について、$AB$ の列が $Ab_1, Ab_2$ であることを確認せよ。

**Correct**

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

である。一方、

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Ab_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$AB = [Ab_1 \;\; Ab_2]$$

である。

この問題は、行列積を成分計算だけでなく、「右の行列の各列を左の行列で写す」と読む練習である。

---

# 9 関連講義

→ 講義 線型性の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/

→ 講義 行列の基本演算 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の基本演算-講義/

→ 講義 行列の積の意味 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の積の意味-講義/

→ 講義 単位行列・零行列・転置の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 線型写像と行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/