複素内積とユニタリ行列-基本演習

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 内積空間の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 対称行列と直交対角化 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対称行列と直交対角化-講義/

→ 講義 最小二乗法の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小二乗法の基本-講義/

1 演習方針

複素の計算では、複素共役を取る場所が本質的である。この演習では、複素内積、共役転置、エルミート行列、ユニタリ行列が何を保存し、何を判定するための条件なのかを確認する。

---

2 問題 1

この系列の規約

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

で、

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、$\langle u, v\rangle$、$\langle v, u\rangle$、$\| u \|$ を求めよ。

2.1 解答例

Correct

$$\langle u, v\rangle = 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{1} = -i + i = 0$$

$$\langle v, u\rangle = i \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{i} = i - i = 0$$

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{1 \cdot \bar{1} + i \cdot \bar{i}} = \sqrt{2}$$

2.2 解説

複素内積では、第 2 変数の成分に複素共役が付く。この問題は、直交の判定で共役を忘れると結果が変わることを確認している。

---

3 問題 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

について、A^* を求め、A がエルミート行列かどうかを判定せよ。

3.1 解答例

Correct

まず転置してから各成分の共役を取る。

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

したがって $A^* = A$ であり、A はエルミート行列である。

3.2 解説

エルミート行列では、対角成分が実数になり、非対角成分は鏡映位置で複素共役になる。この条件は実対称行列の複素数版である。

---

4 問題 3

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

がユニタリ行列であることを確認し、任意の $x = (x_1, x_2)^T$ について $\| Ux \| = \| x \|$ が成り立つことを説明せよ。

4.1 解答例

Correct

$$U^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

なので、

$$U^*U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = I$$

である。したがって U はユニタリ行列である。また

$$Ux = \begin{pmatrix} x_1 \\ ix_2 \end{pmatrix}$$

だから

$$\| Ux \|^2 = |\ x_1|^2 + |\ ix_2|^2 = |\ x_1|^2 + |\ x_2|^2 = \|\ x \|^2$$

である。

4.2 解説

ユニタリ行列は位相を変えることはあるが、長さと内積を保存する。この問題は、「複素数を掛ける」と「長さを変える」が同じでないことを確認している。

---

5 問題 4

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

について、y の $\mathrm{span}(u)$ への直交射影を求めよ。

5.1 解答例

Correct

この規約では

$$\mathrm{proj}_u(y) = \frac{\langle y, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

である。まず

$$\langle y, u \rangle = 1 \cdot \overline{1} + (1+i)\overline{i} = 1 + (1+i)(-i) = 2 - i$$

また

$$\langle u, u \rangle = 1 \cdot \overline{1} + i\overline{i} = 2$$

なので、

$$\mathrm{proj}_u(y) = \frac{2-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} + i \end{pmatrix}$$

5.2 解説

分母の $\langle u, u \rangle$ は、$u \neq 0$ と正定値性により正の実数である。ここでは $u \neq 0$ なので 0 除算は起きない。この問題は、射影係数の式でも共役の位置が重要であることを確認している。

---

6 問題 5

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め、エルミート行列の固有値が実数になることと対応しているかを確認せよ。

6.1 解答例

Correct

$$\det(B-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda & i\\ -i & 2-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)^2-1$$

である。したがって

$$(2-\lambda)^2=1$$

より、固有値は $1,3$ である。どちらも実数である。

6.2 解説

$B^*=B$ なので B はエルミート行列である。エルミート行列は複素数を成分に持っていても、固有値は実数になる。この性質が、量子力学などで観測量をエルミート行列で表す理由の 1 つである。

7 問題 6

つぎの文の正誤を判定し、理由を述べよ。

1. ユニタリ行列は内積を保存する。
2. エルミート行列は必ず正規行列である。
3. ユニタリ行列は必ずエルミート行列である。

7.1 解答例

Correct

1 は正しい。$U^*U=I$ より $\langle Ux,Uy\rangle=\langle x,y\rangle$ である。

2 は正しい。$A^*=A$ なら $A^*A=A^2=AA^*$ である。

3 は誤りである。$\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}$ はユニタリ行列だが、エルミート行列ではない。

7.2 解説

ユニタリ行列、エルミート行列、正規行列は互いに近いが、同じ概念ではない。何を保存する条件なのか、何を対角化する条件なのかを分けて読むことが重要である。

8 問題 7

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

を $\mathbb{C}$ 上で考える。A が正規行列であることを確認し、ユニタリ行列で対角化せよ。

8.1 解答例

Correct

$A^* = -A$ であり、$A^2 = -I$ なので

$$A^*A = (-A)A = I, \qquad AA^* = A(-A) = I$$

である。したがって $A^*A = AA^*$ であり、A は正規行列である。

固有値は $i, -i$ である。i に対する固有ベクトルとして $(1, i)^T$、$-i$ に対する固有ベクトルとして $(1, -i)^T$ を取れる。これらを正規化して

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$U^*AU = D$$

である。

8.2 解説

この行列はエルミート行列ではないが、正規行列である。複素では、エルミート行列だけでなく、正規行列もユニタリ対角化の自然な対象になる。

---

9 問題 8

この系列の規約

$$\langle x, y \rangle = \sum_k x_k \overline{y_k}$$

で、

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に Gram-Schmidt の直交化を行え。

9.1 解答例

Correct

まず

$$u_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

とする。$u_1 \neq 0$ であり、$\langle u_1, u_1 \rangle = 2$ なので、射影係数を定義できる。

$$u_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{i}{2}\end{pmatrix}$$

である。

9.2 解説

複素内積では、射影係数の分子に現れる共役の位置が重要である。この問題では $\langle x_2, u_1\rangle = 1$ であり、u_2 は u_1 に直交する。

10 問題 9

$$A = \begin{pmatrix}1 & i\\0 & 2\end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

について、$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ を具体計算で確認せよ。

10.1 解答例

Correct

$$Ax = \begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}$$

なので

$$\langle Ax, y\rangle = (1+i)\bar{i} + 2\bar{1} = 3 - i$$

である。また

$$A^* = \begin{pmatrix}1 & 0\\-i & 2\end{pmatrix}$$

だから

$$A^* y = \begin{pmatrix}i\\3\end{pmatrix}$$

であり、

$$\langle x, A^* y\rangle = 1\bar{i} + 1\bar{3} = 3 - i$$

である。したがって両辺は一致する。

10.2 解説

共役転置 A^* は、複素内積に対する随伴である。この等式は、A^* が単なる記号ではなく、内積の中で A を反対側へ移すための操作であることを示している。

11 問題 10

この系列の規約で

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。複素最小二乗問題 $Ax \simeq b$ の正規方程式を解き、残差が列空間に直交することを確認せよ。

Correct

ここでは

$$A^* = (1 \ \ -i)$$

である。したがって

$$A^*A = 1 + (-i)i = 2, \qquad A^*b = 1$$

である。正規方程式

$$A^*Ax = A^*b$$

は $2x = 1$ となるので、

$$x = \frac{1}{2}$$

である。このとき

$$Ax = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \qquad r = b - Ax = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

である。さらに

$$A^*r = (1 \ \ -i)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

なので、残差は列空間に直交する。

この問題は、実数の最小二乗法で現れた「残差が列空間に直交する」という幾何が、複素内積でも $A^*r = 0$ として表されることを確認している。

12 問題 11

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

がユニタリ行列であることを確認し、

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ を具体計算で確認せよ。

Correct

U は実対称であり、

$$U^*U = U^TU = I$$

なのでユニタリ行列である。また

$$Ux = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+i \\ 1-i\end{pmatrix}, \qquad Uy = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$$

である。この規約では第 2 変数に共役を付けるので、

$$\langle Ux, Uy\rangle = \frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2} = 1$$

である。一方、

$$\langle x, y\rangle = 1\cdot\overline{1} + i\cdot\overline{0} = 1$$

である。したがって $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ である。

この問題は、ユニタリ行列が対角行列でなくても、内積と長さを保存することを確認する。Ux と Uy の成分は変わるが、二つのベクトルの幾何的な関係は変わらない。

---

13 関連講義

→ 講義 **複素内積とユニタリ行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 **内積空間の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 **単位行列・零行列・転置の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/

→ 講義 **対称行列と直交対角化** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対称行列と直交対角化-講義/

→ 講義 **直交化の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交化の基本-講義/

→ 講義 **最小二乗法の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小二乗法の基本-講義/