階段形と掃き出し-基本演習

→ 講義 **階段形と簡約階段形** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階段形と簡約階段形-講義/

→ 講義 **連立一次方程式と掃き出し法** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/

→ 講義 **逆行列の計算手順** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の計算手順-講義/

1 演習方針

階段形は、ピボットの位置から主変数、自由変数、矛盾行を読むための形である。掃き出しでは、割る前にピボットが 0 でないことを確認する。

---

2 問題 1

つぎの拡大係数行列を行階段形と簡約行階段形まで変形し、解集合を読み取れ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1 解答例

Correct

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これは行階段形である。さらに $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$ とすると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。$x_3 = t$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である。

2.2 解説

行階段形は前進消去で作り、簡約行階段形は上のピボット列も 0 にする。解の個数は、ピボットの個数と矛盾行の有無から決まる。

---

3 問題 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & b \end{pmatrix}$$

について、a, b の値により解が一意に存在する場合、無限に存在する場合、存在しない場合を分類せよ。

3.1 解答例

Correct

$a \neq 1$ の場合、第 3 行は $(a-1)z = b$ である。ここでは $a-1 \neq 0$ なので $z = b/(a-1)$ と解ける。したがって一意解を持つ。

$a = 1$ の場合、第 3 行は $0z = b$ である。$b = 0$ なら z が自由変数となり、解は無限に存在する。$b \neq 0$ なら矛盾するので、解は存在しない。

3.2 解説

文字式で割る前に、分母が 0 にならない条件を分ける。ここで確認すべきなのは $a-1$ であり、割り算に現れない量まで不要に場合分けしない。

---

4 問題 3

$$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について、$(A(a) \mid I)$ を掃き出しし、$A(a)^{-1}$ を求めよ。

4.1 解答例

Correct

a をピボットにすると $a = 0$ の場合が問題になる。ここでは第 2 行の 1 をピボットにするため、まず行を交換する。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

したがって

$$A(a)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

である。

4.2 解説

この解法では a で割っていないため、$a = 0$ でも同じ手順で処理できる。問題になるのは実際に分母へ置いた量が 0 になりうる場合である。

---

5 問題 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

について、$(A \mid I)$ を掃き出しし、A^{-1} が存在しないことを説明せよ。

5.1 解答例

Correct

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。左側に零行が現れるため、左側を I に変形できない。したがって A は可逆ではなく、A^{-1} は存在しない。

5.2 解説

逆行列の掃き出しでは、左側を単位行列にできるかが判定基準である。途中で零行が出ることは、入力の方向が潰れていることを示す。

---

6 関連演習

→ 基本演習 **基本変形と連立一次方程式** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/基本変形と連立一次方程式-基本演習/

→ 基本演習 **列基本変形と未知数変換** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/列基本変形と未知数変換-基本演習/

7 関連講義

→ 講義 **階段形と簡約階段形** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階段形と簡約階段形-講義/

→ 講義 **連立一次方程式と掃き出し法** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/

→ 講義 **逆行列の計算手順** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の計算手順-講義/