

ダイクストラ法の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、ダイクストラ法は「いま一番近い未確定の頂点から順に距離を確定していく」方法だということです。

重みつき最短路では、ただ幅優先に広げるだけでは足りません。しかし辺の重みが負でなければ、いま最小の距離をもつ候補を確定しても、あとからもっと短い道が出てくることはありません。この事実を使うのがダイクストラ法です。

2 用語と定義

確定とは、その頂点までの最短距離がもう変わらないと認めることです。

更新とは、ある辺を通った方が距離を短くできるなら、記録を書き換えることです。

3 方針

まず始点の距離を0、他を無限大として始めます。そのあと、未確定の頂点のうち距離が最小のものを選んで確定し、そこから出る辺で更新を行います。

4 直感的な説明

地図で近い町から順に「ここまではもう最短で着ける」と印をつけていく感覚です。重みが負でなければ、いま一番近い町を後回しにする理由はありません。

5 厳密な説明

5.1 1. 初期化

始点 s に対して

$$\text{dist}(s) = 0$$

とし、他の頂点は

$$\text{dist}(v) = \infty$$

とします。

5.2 2. 確定

未確定の頂点のうち、 dist が最小のもの u を選びます。辺の重みが負でないので、 u より短い道があとから現れることはありません。したがって u を確定できます。

5.3 3. 更新

u から隣接する頂点 v に重み $w(u, v)$ の辺があるとき、

$$\text{dist}(u) + w(u, v) < \text{dist}(v)$$

なら

$$\text{dist}(v) \leftarrow \text{dist}(u) + w(u, v)$$

と更新します。

6 見分け方

- 重みつき最短路で、重みが負でないならダイクストラ法の候補です。
- 最小の距離をもつ未確定の頂点を順に確定していく、という言葉で説明できるかを確認します。
- 負の重みがあると、この「いま最小なら確定してよい」という理屈が壊れます。

7 最終形

負でない重みつき最短路 \Rightarrow ダイクストラ法

最小の未確定頂点を選び、更新を繰り返す

8 一言でいうと

- ダイクストラ法は、負でない重みつきグラフで、近い頂点から順に最短距離を確定していく手法です。