フィードバック制御の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、**制御とは、出力を見て入力を調整し、目標値との差を小さくしていく仕組みだと捉えること**です。

制御工学では、機械や回路や化学反応を、まず時間変化する系として表します。そのうえで、出力を戻して入力へ返すと、なぜ安定したり応答が速くなったりするのかを見ます。

2 用語と定義

フィードバックとは、出力の情報を入力側へ戻して、制御入力を決める仕組みです。

伝達関数 Transfer function とは、線形時不変システムで、入力と出力のラプラス像の比として定義される関数です。

3 方針

まず負帰還の考え方を押さえます。そのあと、一次遅れの微分方程式を例にして、時間領域とラプラス変換による周波数領域の両方から見ます。

→ 講義 **微分方程式の入口** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分方程式の入口-講義/

→ 講義 **ラプラス変換の入口** lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/ラプラス変換の入口-講義/

4 直感的な説明

暖房の温度制御を考えると、部屋が目標温度より低ければ強く温め、高すぎれば弱めるはずです。ここでは「いま何度ずれているか」が入力を決める情報です。これが誤差を見る制御です。

フィードバックがないと、入力を固定したままなので、外乱や条件変化に弱くなります。戻して見ることで、自分の出力を使って自分を調整するのが制御の核心です。

5 厳密な説明

5.1 1. 一次遅れの系

入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ が

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku$$

を満たすとします。τ は時定数、K はゲインです。

この式は、「出力が急には変われず、入力へ少しずつ追いつく」ことを表しています。

5.2 2. 時間領域の見方

入力を一定 $u(t) = u_0$ とすると、

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K u_0$$

です。これは平衡点 $y = K u_0$ を持つ一次微分方程式で、解は

$$y(t) = K u_0 + C e^{-t/\tau}$$

となります。したがって出力は指数関数的に目標値へ近づきます。

ここで τ が時定数と呼ばれるのは、$e^{-t/\tau}$ の指数に直接現れ、応答の速さを支配するからです。τ が小さいほど速く、τ が大きいほどゆっくり目標値へ近づきます。

5.3 3. 伝達関数の見方

初期値を 0 としてラプラス変換すると

$$\tau s Y(s) + Y(s) = K U(s)$$

なので

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}}$$

です。これが伝達関数です。

伝達関数を使う理由は、微分方程式をそのつど解かなくても、「どの周波数の入力をどれだけ通すか」という性質を直接見られるからです。ここで分母 $\tau s + 1$ の根が極で、安定性や減衰のしやすさを決めます。

5.4 4. 負帰還を入れる

目標値を r、誤差を $e = r - y$ として、入力を

$$u = Ce$$

とします。ここで C は制御器のゲインです。すると

$$y = G(s)u = G(s)C(r - y)$$

より

$$y(1 + G(s)C) = G(s)Cr$$

なので

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)C}{1 + G(s)C}}$$

です。

この分母の $1 + G(s)C$ が、閉じたループの安定性や応答を決めます。

なぜ負帰還で $1 + GC$ になるかというと、出力が誤差を減らす向きに戻るからです。もし $u = C(r + y)$ のような正帰還なら、同じ計算で分母は $1 - GC$ になり、小さなずれが増幅されやすくなります。

6 別の見方

6.1 時間領域の見方

微分方程式を解いて、時間とともに出力がどう変わるかを見る見方です。

6.2 周波数領域の見方

ラプラス変換や伝達関数を使い、極や零点で系の性質を見る見方です。こちらの見方だと、ブロック線図や周波数応答へ進みやすくなります。

6.3 線形代数的な見方

状態変数を使うと、制御は行列で時間発展を追う問題としても見られます。こちらは多入力多出力システムへ自然に広がります。

→ 講義 状態方程式の基本 lecture information control
https://study.bem130.com/lecture/information/control/状態方程式の基本-講義/

7 見分け方

- 目標値へ近づく速さや過渡応答を問うなら、まず微分方程式を見ます。
- 安定性や閉じたループの性質を整理するなら、伝達関数と分母を見ます。
- 多変数の系へ進みたいなら、行列による状態方程式の見方が重要です。

8 どこまで成り立つか

ここでの伝達関数の議論は、線形かつ時不変の系を前提にしています。飽和や摩擦や大振幅のような非線形が強いと、単純な伝達関数だけでは足りません。

また、ここでは制御器 C を定数ゲインとして扱いましたが、実際には比例・積分・微分を組み合わせた PID 制御のように、C 自体が周波数依存の作用を持つこともあります。

9 最終形

$$\boxed{\tau\frac{dy}{dt}+y=Ku}$$

$$\boxed{G(s)=\frac{K}{\tau s+1}}$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)C}{1+G(s)C}}$$

10 関連リンク

→ 講義 **微分方程式の入口** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分方程式の入口-講義/

→ 講義 **ラプラス変換の入口** lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/ラプラス変換の入口-講義/

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/