# 状態方程式の基本

## 1 導入

この講義で最重要なのは、動的システムを 1 本の高階微分方程式としてではなく、複数の状態変数の連立として見ると、構造が見えやすくなることです。

制御工学では、入力 と 出力 だけを見ると十分に見えないことがあります。いま系の内部で何が保存され、どの 量 が次の 瞬間 を決めるかを明示するために、状態方程式を使います。

## 2 用語と定義

状態変数 とは、その時刻の系の 情報 として、未来の時間発展を決めるのに必要な変数です。

状態方程式 とは、状態変数の時間変化を 表 す方程式です。

## 3 方針

まず 2 階微分方程式を 1 階の連立方程式へ書き換えます。そのあと、行列 で書くと何が見やすくなるか、さらに伝達関数との関係まで見ます。

→ 講義 **フィードバック制御の基本** lecture information control
https://study.bem130.com/lecture/information/control/フィードバック制御の基本-講義/

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

## 4 直感的な説明

質点とばねの運動を 考 えると、位置だけでは次の 瞬間 は決まりません。速度も必要です。つまり「いまどこにいるか」と「いまどう動いているか」の 2 つを持ってはじめて、未来が決まります。これが 状態 です。

高階微分方程式を 1 本で持つかわりに、「必要な 情報 を並べた列ベクトルがどう変わるか」を見るほうが、複雑な系では自然です。

## 5 厳密な説明

### 5.1 0. なぜ 1 階の連立方程式へ直すのか

微分方程式で未来を決めるには、その時点で必要な 情報 をちょうど過不足なく持つことが 重要 です。2 階方程式なら、ふつうは位置と速度が分かれば次が決まります。つまり「2 階だから 2 個の状態変数が要る」という見方が自然です。

状態方程式は高階微分方程式を細かくばらしているのではなく、未来を決める最小限の情報を 1 階の時間発展へ並べ直している、と見ると分かりやすくなります。

## 5.2 1. 2 階微分方程式を状態方程式へ直す

たとえば

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t)$$

を考えます。ここで入力は $u(t)$ です。
状態変数を

$$x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x}$$

とおくと、

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u(t)$$

です。これで 2 階の方程式が 1 階の連立方程式へ変わりました。
ここで重要なのは、問題そのものは変わっていないことです。$x_1, x_2$ が分かれば $x, \dot{x}$ が分かり、逆に $x, \dot{x}$ が分かれば $x_1, x_2$ も決まります。したがって、見方を変えているだけで、情報は失っていません。

## 5.3 2. 行列で書く

いま

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}u(t)$$

です。ふつう

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu}$$

と書きます。さらに出力 $y$ を

$$\boxed{y = C\mathbf{x} + Du}$$

と書きます。

## 5.4 3. なぜ行列が自然か

行列 $A$ の各成分は、「ある状態変数が、ほかの状態変数の変化へどう効くか」を表しています。つまり系の内部結合がそのまま行列に入ります。

線形の場合、時間発展は「現在の状態ベクトルへ行列を作用させる」と見られます。だから固有値を見ると、減衰するのか、振動するのか、発散するのかが読みやすくなります。ここで線形代数の見方が効いてきます。

### 5.5 4. 伝達関数との関係

初期値を 0 としてラプラス変換すると

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

なので

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

です。したがって

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

となり、

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

を得ます。これで状態方程式と伝達関数がつながります。

ここで $(sI - A)^{-1}$ が出るのは、微分がラプラス変換で $s$ 倍になり、内部結合が行列 $A$ で表されるからです。つまり伝達関数は、入力と出力の比であると同時に、内部構造を圧縮して見せる式でもあります。

## 6 別の見方

### 6.1 微分方程式の見方

高階微分方程式を直接解いて応答を見る見方です。

### 6.2 線形代数的な見方

状態をベクトルとし、時間発展を行列で見る見方です。こちらの見方では、固有値と安定性の関係が見えやすくなります。

→ 講義 固有値と固有ベクトル lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/

## 7 見分け方

- 内部状態を明示したいなら、状態方程式を使います。
- 入力と出力の比だけを見たいなら、伝達関数が便利です。
- 多変数・多入力多出力へ進むなら、状態方程式の見方が自然です。

## 8 どこまで成り立つか

ここでの行列表現は線形の系を前提にしています。非線形な系でも状態変数の考え方は使えますが、$A, B, C, D$ の定数行列だけでは書けなくなります。

また、$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ は初期値を 0 として導いています。初期状態が 0 でないときは、その効果が別に残ります。

## 9 最終形

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu}$$

$$\boxed{y = C\mathbf{x} + Du}$$

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$