同値関係と剰余類の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、数学では「本当に区別したい違い」だけを残すために、同値関係で対象をまとめることです。

たとえば整数を 5 で割った余りだけが重要なら、5 差だけ違う数は同じものとして見たいはずです。この「同じとみなす規則」が同値関係で、そうしてできる分類の 1 つ 1 つが剰余類です。

2 用語と定義

同値関係 (Equivalence relation) とは、集合の要素どうしに「同じとみなす」規則を与える関係で、反射律、対称律、推移律を満たすものです。

剰余類 (Residue class) とは、ある同値関係で同じとみなされる要素をひとまとめにした集合です。

3 方針

まず、なぜ同値関係が 3 つの条件を必要とするかを見ます。そのあと、整数の差が n の倍数であるという関係から剰余類を作ります。

→ 講義 集合と写像の基本 lecture information discrete-math
https://study.bem130.com/lecture/information/discrete-math/集合と写像の基本-講義/

→ 講義 整数の性質の基本 lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/整数の性質の基本-講義/

4 直感的な説明

対象をそのまま全部区別していると、本質が見えにくいことがあります。余りだけを見たいなら、7 と 12 と 17 を別々に持つより、「5 で割ると 2 余る仲間」としてひとまとめにしたほうが自然です。

5 厳密な説明

5.1 1. なぜ同値関係は 3 条件が要るのか

同じとみなす規則なら、自分自身は自分と同じでなければなりません。これが反射律です。

また a と b を同じとみなすなら、b と a も同じでなければ不自然です。これが対称律です。

さらに a と b、b と c が同じなら、a と c も同じでなければ分類が壊れます。これが推移律です。

5.2 2. 整数での例

$$a \sim b \iff n \mid (a-b)$$

と定めます。これは「a と b の差が n の倍数なら同じとみなす」という意味です。

この関係が同値関係であることを確かめます。

- 反射律:

$$a - a = 0$$

で、0 はどんな n の倍数でもあるので $a \sim a$ です。

- 対称律:

$$a - b = nk$$

なら

$$b - a = -nk$$

で、これも n の倍数です。

- 推移律:

$$a - b = nk, \qquad b - c = n\ell$$

なら

$$a - c = (a-b) + (b-c) = n(k+\ell)$$

で、やはり n の倍数です。

5.3 3. 剰余類が何か

この同値関係で a と同じ仲間を

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim a\}$$

と書きます。これが a の剰余類です。

たとえば $n = 5$ なら

$$[2] = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$$

です。ここでは「5 で割ると 2 余る整数の全部」がひとまとめになっています。

5.4 4. なぜ剰余類が便利か

整数そのものを見るかわりに剰余類を見ると、「余りだけを覚えておけばよい」計算ができます。これが合同式や $\bmod n$ 演算の土台です。

6 別の見方

6.1 分類の見方

同値関係を「対象を何種類かの箱へ分ける規則」として見る見方です。

6.2 代数的な見方

$a - b$ が n の倍数かどうかで決まる関係として見る見方です。こちらでは合同式や演算と結びつきやすくなります。

7 見分け方

- 本質的に同じものをまとめたいときは、まず同値関係を疑います。
- 余りだけが重要な整数問題なら、剰余類の見方が自然です。

8 どこまで成り立つか

ここでは整数の上で差が n の倍数かどうかを使いましたが、同値関係そのものは整数に限りません。図形、関数、行列でも「どこまでを同じとみなすか」によって 商集合 を作れます。

9 最終形

$$\boxed{a \sim b \Longleftrightarrow n \mid (a - b)}$$

$$\boxed{[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim a\}}$$

10 一言でいうと

- 剰余類とは、「差が n の倍数なら同じ」とみなして整数をまとめた仲間分けです。