準同型の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、**準同型とは「元そのもの」ではなく「演算の仕方」を保って別の世界へ移す写像**だということです。

抽象代数では、対象を比較するときに要素を 1 つずつ見比べるのではなく、演算の構造が保たれているかを見ます。その最小の言葉が準同型です。

2 用語と定義

群準同型 (Group homomorphism) とは、群 G, H の間の写像 $f : G \to H$ で

$$f(a * b) = f(a) \star f(b)$$

を満たすものです。

環準同型 (Ring homomorphism) とは、環の足し算と掛け算の両方を保つ写像です。

3 方針

まず、なぜ準同型が「構造を保つ写像」と呼ばれるのかを見ます。そのあと、整数から mod n への写像を例にして、核と像が何を意味するかを説明します。

→ 講義 **群の基本** lecture math abstract-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/abstract-algebra/群の基本-講義/

→ 講義 **環の基本** lecture math abstract-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/abstract-algebra/環の基本-講義/

→ 講義 **合同式と mod 演算の基本** lecture math abstract-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/abstract-algebra/合同式と mod 演算の基本-講義/

4 直感的な説明

準同型は、「計算してから写す」のと「写してから計算する」の結果が一致する写像です。だから複雑な世界の計算を、より見通しのよい世界へ移して考えられます。

5 厳密な説明

5.1 1. なぜこの定義なのか

もし f が単なる写像でなく、演算の意味まで保ってほしいなら、

$$a * b$$

を先に計算してから写したものと、

$$f(a) \star f(b)$$

を写した先で計算したものが一致しなければいけません。だから

$$f(a * b) = f(a) \star f(b)$$

が自然な定義になります。

5.2 2. 整数から mod n への写像

$$\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \qquad \pi(a) = [a]$$

を考えます。これは

$$\pi(a+b) = [a+b] = [a] + [b] = \pi(a) + \pi(b)$$

を満たすので、加法群としての準同型です。

さらに

$$\pi(ab) = [ab] = [a][b] = \pi(a)\pi(b)$$

なので、環準同型でもあります。

5.3 3. 核とは何か

群準同型 $f : G \to H$ の核とは、

$$\ker f = \{a \in G \mid f(a) = e_H\}$$

です。つまり「単位元へ潰れてしまう元の集まり」です。

さきほどの $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ では

$$\ker \pi = n\mathbb{Z}$$

です。なぜなら $[a] = [0]$ であることと、a が n の倍数であることは同値だからです。

ここで重要なのは、合同式

$$a \equiv b \pmod n$$

が、「$a - b$ が核に入る」という言葉でも読めることです。

5.4 4. 像とは何か

像とは

$$\operatorname{Im} f = \{f(a) \mid a \in G\}$$

です。これは「実際に到達できる元の集まり」です。

$$\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

では、すべての剰余類が像に現れるので、全射です。

5.5 5. なぜ剰余類と準同型がつながるのか

準同型の核は、「同じものとして潰される違い」を表します。mod n では、その違いが n の倍数です。だから剰余類は、核によって同じとみなされた仲間分けとして見えます。

6 別の見方

6.1 計算の見方

複雑な計算を、より扱いやすい世界へ移す道具として見る見方です。

6.2 構造的な見方

核と像を通して、「何を同じとみなし」「どこまで届くか」を記述する見方です。

6.3 線形代数的な見方

線形写像の核と像と同じ発想が、抽象代数でも働くと見る見方です。

7 見分け方

- 別の構造へ移して計算したいときは、準同型を疑います。
- mod 演算が自然に現れるときは、核や剰余類の見方が効きます。

8 どこまで成り立つか

ここでは基本だけに絞って、核と像までを扱いました。さらに進むと、商群や商環、同型定理へ進みます。

9 最終形

$$\boxed{f(a * b) = f(a) \star f(b)}$$

$$\boxed{\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\, \pi(a) = [a]}$$

10 一言でいうと

- 準同型とは、計算の仕方を壊さずに別の世界へ移す写像です。