

ふとうしき きほん 不等式の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、等式と同じ感覚で変形せず、どの操作が大小関係を保ち、どの操作で向きが変わるかを意識することです。

不等式で誤りやすいのは、両辺を負の数で掛けたり割ったりしても、そのまま不等号の向きを変えないことです。この講義では、変形の可否と場合分けを中心に整理します。

2 用語と定義

不等式とは、2つの量の大小関係を $<, \leq, >, \geq$ で表したものです。

3 方針

まず、等式と同じように足してよいか、掛けてよいかを確認します。そのあと、式の符号が変わりうる場所では場合分けをします。

4 直感的な説明

不等式は「数直線のどちら側にあるか」を表しています。だから負の数を掛けると、数直線を0を中心に裏返すことになり、向きが逆になります。

5 厳密な説明

5.1 1. 保たれる操作

$a < b$ のとき、どんな実数 c に対しても

$$a + c < b + c$$

です。また $c > 0$ なら

$$ac < bc$$

です。

5.2 2. 向きが変わる操作

$c < 0$ なら

$$ac > bc$$

です。したがって、負の数で掛けたり割ったりするときは、不等号の向きが反転します。

5.3 3. 二次不等式

たとえば

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

は

$$(x - 1)(x - 2) > 0$$

と因数分解できるので、積が正になる範囲を考えます。これはグラフで見れば、放物線が x 軸より上にある範囲です。

6 別の見方

代数的には因数分解や変形で符号を追う分野です。図形的には、数直線やグラフのどちら側にあるかを見る分野です。

7 見分け方

- 文字で割るときは、その文字の符号が確定しているかを先に確認します。
- 二次不等式が出たら、因数分解かグラフで範囲を見ます。

8 最終形

負の数を掛ける・割ると不等号は反転する

9 一言でいうと

- 不等式では、変形そのものよりも「その変形が大小関係をどう変えるか」を見ることが大切です。