二次方程式の解の公式

1 導入

二次方程式の解の公式で最重要なのは、**平方完成をして、左辺を 1 つの二乗の形に変形すること**です。公式だけを暗記すると、なぜ $-b$ や $4ac$ や $2a$ が現れるのかが見えません。しかし平方完成の手順を追えば、公式は突然出てくるものではなく、二次式を一次式の二乗へ変える結果だと分かります。

2 用語と定義

まず主役になる用語をそろえます。

二次方程式 Quadratic equation とは、$ax^2 + bx + c = 0$ の形の方程式です。ただし $a \neq 0$ です。

平方完成 Completing the square とは、$x^2 + px$ のような式を $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ の形に直す操作です。

判別式 Discriminant とは、二次方程式の解の様子を決める $D = b^2 - 4ac$ のことです。

3 方針

$ax^2 + bx + c = 0$ をそのまま見ても、x を直接取り出すのは難しいです。そこで、まず a で割って x^2 の係数を 1 にそろえます。

そのうえで $x^2 + \frac{b}{a}x$ を 1 つの二乗にしたい、と考えます。なぜなら、二乗の形になれば平方根を使って x を取り出せるからです。これが平方完成を思いつく理由です。

4 直感的な説明

二次方程式の難しさは、x が 2 乗と 1 乗の両方で現れることにあります。そこで「1 つの二乗に見える形へ持ち込む」ことを狙います。

代数的には平方完成ですが、図形的には「正方形を完成させる」と見ることもできます。だから $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を足すのは、ただの手筋ではなく、不足している四角を埋める発想です。

5 厳密な説明

5.1 1. まず係数をそろえる

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

を a で割ると

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

です。したがって

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

となります。

5.2　2. 平方完成する

ここで $x^2 + \frac{b}{a}x$ を 1 つの二乗にしたいので、$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を足して引きます。すると

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

です。

左辺は

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

となります。右辺は通分して

$$-\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

です。したがって

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

を得ます。

5.3　3. 平方根を取る

両辺の平方根を取ると

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

です。よって

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となり、

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

を得ます。これが二次方程式の解の公式です。

5.4　4. 判別式の意味

公式を見ると、平方根の中身 $b^2 - 4ac$ が解の様子を決めています。

- $b^2 - 4ac > 0$ なら、異なる 2 つの実数解を持ちます。
- $b^2 - 4ac = 0$ なら、重解を持ちます。
- $b^2 - 4ac < 0$ なら、実数解を持ちません。

したがって $D = b^2 - 4ac$ を判別式と呼びます。

5.5 5. 別の見方

対称式の立場では、解の和と積が

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

で与えられます。そこから解そのものを復元するには、和と積を持つ 2 つの数を求める問題へ戻せばよい、と見ることもできます。

6 どこまで成り立つか

この公式は、$a \neq 0$ である二次方程式にはいつでも使えます。
ただし、実数の範囲だけで考えると、$D<0$ のときは平方根が実数にならないので、解を実数としては書けません。
また、公式を使わなくても因数分解できる場合はあります。そのときでも、後ろでは同じ構造が働いています。

7 最終形

二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

の解は

$$\boxed{x=\tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

です。
また、判別式

$$\boxed{D=b^2-4ac}$$

により解の個数と種類が分かります。

8 一言でいうと

- 解の公式は、平方完成の結果です。
- 平方完成を思いつく理由は、二次式を二乗の形に変えて平方根を使いたいからです。
- 判別式 b^2-4ac は、そのまま解の様子を教えてくれます。

9 関連リンク

関連講義・関連ノート

→ 講義 **多項式** lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/多項式-講義/

→ 講義 **対称式** lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/対称式-講義/

元の解答

なし

スキャン画像

なし