

二次関数の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、二次関数を $y = ax^2 + bx + c$ の係数だけで見るのではなく、平方完成して頂点と軸を読むことです。

二次関数の問題は、最大値・最小値、共有点、不等式など見かけが違っても、結局は放物線の位置と向きを見ています。この講義では、その見方を固めます。

2 用語と定義

二次関数とは、 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) の形の関数です。

頂点とは、放物線の向きが切り替わる点です。

3 方針

まず平方完成で

$$y = a(x - p)^2 + q$$

の形へ直します。すると頂点 (p, q) 、軸 $x = p$ 、開く向きがすぐ見えます。そのうえで方程式や不等式をグラフの交点や上下関係として読みます。

4 直感的な説明

二次関数は「U字か逆向きのU字の曲線」です。だから、真ん中にある頂点がどこか、どちら向きに開くかが分かれば、増減も最大最小もかなり決まります。

5 厳密な説明

5.1 1. 平方完成

$$y = ax^2 + bx + c$$

を平方完成すると

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

です。したがって頂点は

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

です。

5.2 2. 最大値と最小値

$a > 0$ なら下に凸なので最小値を持ち、 $a < 0$ なら上に凸なので最大値を持ちます。つまり、係数 a の符号で上下の向きが決まります。

5.3 3. 方程式・不等式とのつながり

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は、放物線と x 軸の交点を問う式です。また

$$ax^2 + bx + c > 0$$

は、放物線が x 軸より上にある部分を問っています。

6 別の見方

計算としては平方完成で頂点を出す分野です。図形としては、放物線の位置と軸を読んで問題を解く分野です。

7 見分け方

- 最大最小が出たら、まず頂点を調べます。
- 不等式が出たら、グラフと x 軸の上下関係へ直します。
- 共有点が出たら、2つの式を連立して交点として見ます。

8 最終形

$$y = a(x - p)^2 + q$$

9 一言でいうと

- 二次関数では、平方完成でグラフの骨格を先に見ることが基本です。