多項式

1 導入

多項式で最重要なのは、**ただの式としてではなく、「数を入れると値が返る対象」として見ること**です。この見方を持つと、「0 にする数を見つける」「因数分解する」「係数と解を結ぶ」という 3 つの話題が、ばらばらではなく 1 本の流れになります。

2 用語と定義

多項式 (Polynomial) とは、$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ のように、x の非負の整数乗だけで作られる式です。
根 (Root) または 解 (Solution) とは、$P(\alpha) = 0$ を満たす数 α のことです。
因数 (Factor) とは、ある多項式を割り切る式です。$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ と書けるなら、$x - \alpha$ は因数です。

3 方針

多項式では、「0 になる点を見ると構造が見える」という方針を取ります。なぜなら、$P(\alpha) = 0$ という事実は、$x - \alpha$ という因子が潜んでいることを示唆するからです。

4 直感的な説明

4.1 1. 関数としての見方

たとえば $P(x) = x^2 - 5x + 6$ は、文字の列ではなく「x を入れると値が決まる機械」です。そこで $x = 2$ や $x = 3$ を入れて 0 になるなら、その機械には「2 で止まる」「3 で止まる」という特別な点がある、と見られます。

4.2 2. いろいろな見方

- 代数的な見方:
  0 にする数を見つけると、因数分解が進みます。
- 関数的な見方:
  根は「値が 0 になる入力」です。
- 方程式の見方:
  解を直接全部求めなくても、和や積のような対称な量は係数から読めます。

5 厳密な説明

5.1 1. 根と因数の対応

$$P(\alpha) = 0$$

なら、$P(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れます。したがって

$$\boxed{P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - \alpha)Q(x)}$$

です。

たとえば $P(x) = x^2 - 5x + 6$ では

$$P(2) = 0, \qquad P(3) = 0$$

なので

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)$$

と因数分解できます。

5.2 2. 係数と解のつながり

二次式

$$ax^2 + bx + c$$

が

$$a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と書けるとします。これを展開すると

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)$$

です。したがって係数比較により

$$\boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

を得ます。

5.3 3. 別の説明

対称式の立場から見ると、ここで見えているのは個々の解そのものではなく、$\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ です。つまり係数は、解を 1 つずつ記録しているのではなく、入れ替えに依存しない量を記録しています。

6 どこまで成り立つか

根と因数の対応は基本的ですが、どの数の範囲で考えるかは重要です。たとえば $x^2 + 1$ は実数では 0 になりませんが、複素数では根を持ちます。

7 最終形

多項式では、まず

$$\boxed{P(\alpha) = 0 \Rightarrow x - \alpha \text{ が因数になる}}$$

が出発点です。

二次式 $ax^2 + bx + c$ の解を α, β とすると

$$\boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

です。

8 一言でいうと

- 0 にする数を見つけると、式の構造が見えます。
- 多項式は、解と因数分解を往復して考えます。
- 係数は、解の和や積のような対称な情報を運んでいます。

9 関連リンク

関連講義・関連ノート

→ 講義 **対称式** lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/対称式-講義/

→ 講義 **二次方程式の解の公式** lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/二次方程式の解の公式-講義/

元の解答

なし

スキャン画像

なし