

たいしょうしき 対称式

1 導入

たいしょうしき きいじゆうよう もじ い か か りよう しゆやく しき せいり いっき らく
対称式で最重要なのは、文字を入れ替えても変わらない量だけを主役にすると、式の整理が一気に楽になることです。

2 用語と定義

たいしょうしき へんすう い か あたい か しき
対称式とは、変数を入れ替えても値が変わらない式です。

Symmetric polynomial
2変数では、 $f(x, y) = f(y, x)$ なら f は対称式です。

きほんたいしょうしき へんすう
基本対称式は、2変数では $x + y$ と xy です。
Elementary symmetric polynomials

3 方針

たいしょうしき もじ なまえ いぞん りよう か か へんすう だいひよう
対称式では、文字の名前に依存しない量へ書き換えます。2変数なら、その代表が $x + y$ と xy です。

4 直感的な説明

4.1 1. なぜ和と積を見るのか

こうかん せき み
 x と y を交換しても、 $x + y$ と xy は変わりません。つまり、この2つは「どちらを1番目の解と呼ぶか」に左右されない量です。

4.2 2. いろいろな見方

だいすうてき みかた
• 代数的な見方:

しき せいり きじゆん つか
式を整理するための基準として使う

ほうていしき みかた
• 方程式の見方:

けいすう あらわ かい わ せき
係数に現れるのは、解そのものではなく和と積

けいさん みかた
• 計算の見方:

ふくざつ しき お か みじか
複雑な式を $s = x + y, p = xy$ に置き換えると短くなる

5 厳密な説明

5.1 1. 対称式の確認

こうかん
 $x + y$ は交換すると

$$y + x = x + y$$

です。また xy は

$$yx = xy$$

です。したがって、どちらも対称式たいしょうしきです。

一方いっぽうで $x - y$ は交換こうかんすると

$$y - x = -(x - y)$$

となるので、一般いっぱんには対称式たいしょうしきではありません。

5.2 2. 基本対称式きほんたいしょうしきで書き直すか なお

たとえば

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

です。ここで $s = x + y$, $p = xy$ とおけば

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

となります。同様どうように

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = s^3 - 3ps$$

です。

5.3 3. 方程式ほうていしきとのつながり

x, y を

$$t^2 - St + P = 0$$

の2つの解かいとします。すると

$$t^2 - St + P = (t - x)(t - y)$$

であり、展開てんかいすると

$$t^2 - (x + y)t + xy$$

です。したがって

$$S = x + y, \quad P = xy$$

を得えます。

5.4 4. 別の説明べつ せつめい

多項式たこうしきの立場たちばでは、解かいを入れ替いえても同じ方程式おな ほうていしきです。だから係数けいすうが記録きろくしているのも、入れ替いえで変わからない情報じょうほうです。ここで対称式たいしょうしきが自然しぜんに現あらわれます。

6 どこまで成り立つな たか

2変数へんすうでは $x + y$ と xy が主役しゅやくですが、3変数へんすう、4変数へんすうと増ふえると基本対称式きほんたいしょうしきも増ふえます。

7 最終形

2変数では

$$s = x + y, \quad p = xy$$

をつくるのが基本です。

たとえば

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

$$x^3 + y^3 = s^3 - 3ps$$

です。

8 一言でいうと

- 入れ替えても変わらない量を先に見ます。
- 2変数なら、まず $x + y$ と xy です。
- 対称式は、多項式の係数と解をつなぐ言葉です。

9 関連リンク

関連講義・関連ノート

→ [講義](#) [多項式](#) [lecture](#) [math](#) [algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/多項式-講義/>

→ [講義](#) [二次方程式の解の公式](#) [lecture](#) [math](#) [algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/二次方程式の解の公式-講義/>

元の解答

なし

スキャン画像

なし