指数関数と対数関数

1 導入

この講義の核心は、**対数とは「乗法を加法へ移す」同型写像であり、自然対数の底 e は「微分しても変わらない唯一の指数関数の底」として特徴付けられる**という見方だ。

記号の暗記として扱うと「なぜ $\log$ が積を和に変えるのか」「なぜ e が特別なのか」が見えない。指数が「何回掛けたか」という回数を表すことを出発点にすれば、対数法則は回数の足し算として自然に導出される。

2 用語と定義

2.1 指数関数
Exponential function

$a>0$、$a\neq 1$ に対して $f(x)=a^x$ を指数関数という。$a>1$ のとき単調増加、$0<a<1$ のとき単調減少。

2.2 対数関数
Logarithmic function

$a^y=x$（$x>0$）を満たす唯一の y を $\log_a x$ と書き、対数という。$\log_a x=y \Longleftrightarrow a^y=x$。

a^x と $\log_a x$ は互いに逆関数の関係にあり、グラフは $y=x$ に関して対称。

2.3 自然対数
Natural logarithm

底 $e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\approx 2.718\ldots$ の対数を自然対数といい $\ln x$ または $\log x$ と書く。

3 方針

1. 指数法則（積→和）から対数法則を導出する
2. e の特別さを微分から理解する（$(e^x)'=e^x$）
3. 具体的な応用（複利・半減期）で直感を固める

4 厳密な説明

4.1 1. 指数法則と対数法則の対応

指数法則：

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\quad (a^m)^n=a^{mn}$$

対数法則の導出：$x=a^m$、$y=a^n$ とおくと $xy=a^{m+n}$ より：

$$\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$$

同様にして：

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a(x^r) = r \log_a x$$

底の変換公式：

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

理解の核心：対数は乗法の群 $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ から加法の群 $(\mathbb{R}, +)$ への群準同型（同型）である。

4.2 2. 自然対数の底 e がなぜ特別か

$f(x) = a^x$ を微分すると：

$$\frac{d}{dx} a^x = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{= \ln a}$$

したがって $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$。$\ln a = 1$ となる底、すなわち $a = e$ のとき $(e^x)' = e^x$。

唯一性：$(f)' = f$ かつ $f(0) = 1$ を満たす関数は e^x のみ（微分方程式の一意性）。

4.3 3. 微分公式

関数	導関数
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$e^{f(x)}$	$f'(x) e^{f(x)}$

$(\ln x)' = 1/x$ の導出：$y = \ln x \iff e^y = x$ を x で微分すると $e^y \cdot y' = 1$、したがって $y' = 1/e^y = 1/x$。

4.4 4. 応用：複利と半減期

複利：年利 r、元本 P_0 のとき n 年後の元本は $P_0(1+r)^n$。連続複利（無限に細かく複利計算）では：

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

導出：m 回複利では $P_0(1 + r/m)^{mt} \to P_0 e^{rt}$（$m \to \infty$）。

半減期：放射性崩壊の量 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$。$N(T_{1/2}) = N_0/2$ より $T_{1/2} = \ln 2/\lambda$。

微分方程式との接続：$N'(t) = -\lambda N(t)$（今ある量に比例して減少）を解くと $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$。

4.5 5. グラフの対称性と漸近線

- $y = e^x$ は x 軸を漸近線として常に正の値
- $y = \ln x$ は y 軸（$x = 0$）を漸近線として $x > 0$ で定義される
- 両者は $y = x$ に対して対称（逆関数の定義）

5 見分け方

- 積・商・冪乗を整理したい → 対数を取る
- 差が一定 → 一次関数、比が一定 → 指数関数
- 「今ある量に比例して変化」 → $N'(t) = kN(t) \to N(t) = N_0 e^{kt}$
- 底が複数 → 底の変換公式で ln に統一

6 どこまで成り立つか

$\log_a x$ は $x > 0$、$a > 0$、$a \neq 1$ で定義される。複素数の範囲では $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より、ln の逆関数である複素対数は多価関数になる（$e^{z+2\pi i} = e^z$）。$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$ という積分による定義は $x > 0$ で対数を代数的に正当化する別アプローチである。

7 最終形

$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x, \qquad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y}$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = (\ln a)a^x}$$

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{rt} \quad (P' = rP,\, P(0) = P_0)}$$

8 一言でいうと

対数は乗法を加法へ移す同型であり、底 e は「微分しても変わらない」という固有性から定まる—自然対数は微積分・確率論・情報理論のすべてで中心的な役割を果たす。

9 関連リンク

→ 講義 微分法の基本 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分法の基本-講義/

→ 講義 テイラー展開とマクローリン展開 lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/テイラー展開とマクローリン展開-講義/

→ 講義 多項式 lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/多項式-講義/