複素数と複素平面

1 導入

この講義の核心は、**複素数とは「平面上の点に乗法を与えたもの」**であり、**掛け算が「拡大と回転の合成」を意味する**という見方だ。

「$i^2 = -1$ になる不思議な数」という見方は本質を隠す。i を掛けることは「90° 回転させる操作」であり、i^2 が -1 になるのは「90° を 2 回で 180° $= -1$（実軸の反対側）」になるからだ。この見方から加法は平行移動、乗法は回転と拡大、オイラーの公式は指数と三角関数の統一として自然に理解できる。

2 用語と定義

2.1 複素数
Complex number

$a, b \in \mathbb{R}$、$i^2 = -1$ として $z = a + bi$ の形の数を複素数（Complex number）という。$a = \mathrm{Re}(z)$（実部）、$b = \mathrm{Im}(z)$（虚部）。

2.2 共役複素数・絶対値・偏角
Complex conjugate / Modulus / Argument

$$\bar{z} = a - bi, \quad |\, z \,| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg z = \theta \text{ ただし } \tan\theta = b/a$$

絶対値は原点からの距離、偏角は実軸からの角度を表す。

3 方針

1. 代数的計算（直交座標 $a + bi$）と幾何的見方（平面の点）の対応を確認する
2. 極形式（偏角と絶対値）で乗法の幾何的意味を明確にする
3. オイラーの公式でこれらを統一する

4 厳密な説明

4.1 1. 基本計算

$z_1 = a + bi$、$z_2 = c + di$ として：

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$z_1 \overline{z_1} = a^2 + b^2 = |\, z_1|^2$$

割り算：$z \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|\, z\,|^2}$。分母を実数化するために共役で有理化する。

4.2 2. 極形式と乗法の幾何

$|\,z\,| = r$、$\arg z = \theta$ として：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

乗法の極形式：

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

すなわち「**絶対値は積、偏角は和**」— z に $w = se^{i\phi}$ を掛けると s 倍拡大して ϕ 回転する。

例：$i = e^{i\pi/2}$ なので i を掛ける = 90° 回転。$-1 = e^{i\pi}$ なので $i^2 = e^{i\pi} = -1$。

4.3 3. オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

特別な値：

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{（オイラーの[等式/とうしき]）}$$

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1$$

三角関数の表現：

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4.4 4. ド・モアブルの定理

n を整数として：

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \Longrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

応用（n 乗根）：$z^n = 1$ の解は $e^{2\pi ik/n}$（$k = 0, 1, ..., n-1$）— 複素平面で正 n 角形の頂点を形成する。

例：$z^3 = 1$ の解は 1、$e^{2\pi i/3} = -1/2 + \sqrt{3}i/2$、$e^{4\pi i/3} = -1/2 - \sqrt{3}i/2$。

4.5 5. 代数学の基本定理

n 次複素係数多項式は複素数の範囲でちょうど n 個の根（重複度数を込み）を持つ。

これは $\mathbb{C}$ が代数的閉体（Algebraically closed field）であることを示す。実数係数多項式では実数解と複素数解が共役のペアで現れる。

4.6 6. 複素数の応用

分野	**使い方**
信号処理	フーリエ変換で $e^{i\omega t}$ が基底
電気回路	インピーダンス（交流回路を複素数で記述）
微分方程式	$e^{i\omega t}$ の実部が $\cos\omega t$、虚部が $\sin\omega t$
幾何	平面の回転・相似変換を乗法で表現

5 見分け方

- 平面の回転・拡大が出た → 乗法（極形式）
- $x^2+1=0$ など実数解が存在しない方程式 → $\mathbb{C}$ で解く
- $\cos n\theta$、$\sin n\theta$ の公式 → ド・モアブルの定理
- 周期関数の解析 → $e^{i\omega t}$ で置換して計算

6 どこまで成り立つか

$\mathbb{C}$ は代数的閉体であり、すべての多項式が根を持つ意味で「最終的な数の体系」である。四元数 $\mathbb{H}$（$a+bi+cj+dk$）は積が可換でない 4 次元の体系であり、3 次元回転を記述する。複素解析では正則関数（複素微分可能な関数）がきわめて豊かな構造を持つことが示される。

7 最終形

$$\boxed{z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z\bar{z} = |\ z\ |^2}$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{（オイラーの[公式/こうしき]）}}$$

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \text{（ド・モアブル）}}$$

8 一言でいうと

複素数の乗法は「拡大と回転の合成」であり、i を掛けることは 90° 回転に過ぎない—オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ はこの見方を指数と三角関数を貫く統一的な記法へ昇華する。

9 関連リンク

→ 講義 二次方程式の解の公式 lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/二次方程式の解の公式-講義/

→ 講義 三角関数 lecture math trigonometry
https://study.bem130.com/lecture/math/trigonometry/三角関数-講義/

→ 講義 ベクトルと内積 lecture math vector
https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルと内積-講義/