

ジューコフスキー変換-講義

1 導入

この講義の核心は、ジューコフスキー変換を公式として暗記するのではなく、円の外部という解きやすい領域を、翼型の外部という工学的に重要な領域へ移すための写像として理解することにある。複素解析では、複雑な領域をそのまま扱うのではなく、正則写像で標準領域へ移し、そこで計算した結果を戻す発想が重要である。ジューコフスキー変換は、この発想が幾何と流体力学に接続する代表例である。

→ 講義 複素解析の入口 [lecture](#) [math](#) [analysis](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/複素解析の入口-講義/>

2 用語と定義

ジューコフスキー変換とは、典型的には

$$J(z) = z + \frac{1}{z}$$

で定義される複素関数である。文献によっては

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

を用いる。係数 $\frac{1}{2}$ は全体の拡大縮小を変えるだけであり、写像の本質は同一である。

等角写像とは、局所的に角度を保つ写像である。正則かつ導関数が0でない点では、複素関数は等角写像として作用する。

3 方針

考察する順序は次の通りである。

1. $J(z) = z + \frac{1}{z}$ が円をどう変形するかを計算する
2. 導関数 $J'(z)$ から、等角性が壊れる点を確認する
3. 中心をずらした円を臨界点へ通すと、なぜ尖点が発生するかを局所展開で確認する
4. 円柱まわりの流れを翼型まわりの流れへ移す構造を整理する

4 直感的な説明

z と $\frac{1}{z}$ を足す形は、点 z と、その反転 $\frac{1}{z}$ を同時に参照する形である。半径 r の円を $z = re^{i\theta}$ と表すと、 $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ であるから、半径の情報と角度の情報が反対向きに混ざる。

この混合により、円周は楕円に移る。単位円だけは特別で、上下方向の成分が相殺され、実軸の線分へ潰れる。

さらに中心を少しずらした円を使うと、像は楕円から非対称な形へ変化する。その円が $z = 1$ を通るよう設定すると、導関数が 0 になる点が境界に乗るため、像に鋭い尖点が現れる。これが翼の後縁を表現する数学的機構である。

5 厳密な説明

5.1 1. 円が楕円へ移る計算

$z = re^{i\theta}$ と置く。ただし $r > 0$ とする。このとき

$$J(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

である。オイラーの公式から $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 、 $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ なので、

$$J(z) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$$

となる。像の実部を x 、虚部を y と書けば、

$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta, \quad y = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$$

である。したがって $r \neq 1$ では

$$\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

を得る。これは楕円の方程式である。

$r = 1$ のときは $y = 0$ となり、 $x = 2 \cos \theta$ であるから、単位円は実軸の線分 $[-2, 2]$ へ移る。

5.2 2. 等角性が壊れる点

J の導関数は

$$J'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$$

である。したがって

$$J'(z) = 0 \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1$$

となる。 $z = 0$ では J そのものが定義されないため、除外する。結論として、 $z = 0, \pm 1$ を避けた領域では、

J は局所的に等角写像として作用する。

5.3 3. 尖点が発生する理由

$z = 1$ の近傍を確認する。 $z = 1 + \varepsilon$ と置くと、

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$$

である。したがって

$$J(1 + \varepsilon) = 1 + \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon} = 2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$$

を得る。一次の項が消滅し、最初に効く変化が ε^2 になる。これは、境界の近い2方向が像の同じ接線方向へ折り込まれることを意味する。この折込みが尖点を生む。

このため、翼型を作る発想は、円をただ変形することではない。臨界点 $z = 1$ を境界に置き、像の後縁を尖らせることが本質である。

5.4 4. 大域的には1対1でない

J には

$$J(z) = J\left(\frac{1}{z}\right)$$

という対称性がある。したがって、全平面から0を除いた領域で1対1にはならない。

しかし、たとえば $|z| > 1$ の外部領域へ制限すれば、像を切断平面として捉えることで等角写像として使用できる。この逆写像を求めると

$$w = z + \frac{1}{z} \iff z^2 - wz + 1 = 0$$

なので、

$$z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2}$$

を得る。平方根が現れるため、枝の選択と枝切りが必要になる。これは、局所的には正則でも、大域的には逆写像の扱いが繊細になる典型例である。

6 具体例

円 $|z| = 2$ を考える。このとき $r = 2$ なので、

$$x = \frac{5}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{3}{2} \sin \theta$$

である。したがって像は

$$\frac{x^2}{(5/2)^2} + \frac{y^2}{(3/2)^2} = 1$$

という楕円になる。半径が1から離れるほど、縦方向の潰れが弱まり、楕円としての厚みが増す。

7 別の観点

7.1 幾何的な観点

ジューコフスキー変換は、円と放射線からなる極座標の曲線族を、楕円と双曲線の曲線族へ移す変換として理解できる。この観点では、式 $z + \frac{1}{z}$ は図形を組み替える装置である。

7.2 複素関数的な観点

$J'(z) = 0$ となる点では、正則写像が局所的な回転と拡大として作用するという性質が破綻する。この破綻を境界に配置することで、滑らかな円から尖った境界を生成できる。

7.3 流体力学への接続

二次元の非圧縮・非粘性・渦なしの流れでは、速度ポテンシャルと流線関数を組み合わせた複素ポテンシャルを用いることができる。このとき、円柱まわりの既知の流れを、等角写像で翼型まわりの流れへ移す戦略が成立する。

ただし、現実の流体には粘性や剥離が存在する。ジューコフスキー変換は理想流体の解析的なモデルとして強力であるが、実験や数値流体の代替そのものではない。

8 判定法

- 円の外部、線分を切った平面、楕円、翼型が同時に現れる問題では、ジューコフスキー変換を候補にする。
- 境界に鋭い点を作りたい問題では、導関数が 0 になる臨界点を境界へ置く発想を確認する。
- 全平面で 1 対 1 の写像が必要な問題では、そのまま使用できない。領域の制限と枝の選択を確認する。

9 どこまで成り立つか

変換 $J(z) = z + \frac{1}{z}$ は $z = 0$ を除く領域で正則である。しかし、 $z = \pm 1$ では導関数が 0 になるため、等角性は成立しない。また、大域的には z と $\frac{1}{z}$ を同一視する性質があるため、領域を制限しないと逆写像を一価に選べない。

流体力学で使用する場合も、非圧縮・非粘性・渦なしという理想化が前提である。粘性や乱流を主要に扱う場合には、このモデルだけでは不足する。

10 最終形

$$J(z) = z + \frac{1}{z}$$

$$J'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}, \quad J'(\pm 1) = 0$$

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow J(z) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$$

11 一言でいうと

ジューコフスキー変換とは、円を解析しやすい対象として保持しつつ、臨界点を境界に配置することで翼型の尖点を生成する複素解析の道具である。

12 関連リンク

→ 講義 複素解析の入口 [lecture](#) [math](#) [analysis](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/複素解析の入口-講義/>

→ 講義 複素積分の基本 [lecture](#) [math](#) [analysis](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/複素積分の基本-講義/>

→ 講義 複素数と複素平面 [lecture](#) [math](#) [algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/複素数と複素平面-講義/>

→ 講義 解析ポータル [lecture](#) [math](#) [analysis](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/解析ポータル-講義/>