テイラー展開とマクローリン展開

1 導入

この講義の核心は、**テイラー展開とは「ある 1 点での局所的な微分情報（$f^{(k)}(a)$ の値すべて）から関数を再構成しようとする試み」**であるという見方だ。

公式の暗記として扱うと「なぜ係数が $f^{(k)}(a)/k!$ なのか」「どこで収束するのか」が不明瞭になる。係数の決まり方は局所的線形近似（$f \approx f(a) + f'(a)(x-a)$）を高次へ組織的に拡張した結果であり、収束は別途半径の議論が必要な独立した問題である。

2 用語と定義

2.1 テイラー展開

f が $x = a$ の近くで無限回微分可能なとき、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

を f の $x = a$ におけるテイラー展開という。$a = 0$ の特別な場合をマクローリン展開という。

注意：テイラー展開を書けても、右辺の級数が $f(x)$ に収束するとは限らない。「展開できる」と「収束して元の関数と一致する」は別の命題である。

3 方針

1. 係数 $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ の導出（微分を k 回して $x = a$ を代入）
2. ラグランジュ剰余項で近似誤差を定量評価
3. 収束半径の計算（ダランベール比判定法）

4 厳密な説明

4.1 1. 係数の決まり方

多項式 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$ を f に合わせたいとする。$x = a$ で $P_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ $(j = 0, 1, ..., n)$ を要求すると：

$$P_n^{(j)}(x) = j! \cdot c_j + (\text{次数} >= 1 \text{ の項})$$

なので $x = a$ を代入して $j! \cdot c_j = f^{(j)}(a)$、したがって

$$c_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$$

この c_j の決め方は一意であり、「a での局所的な微分情報から係数が完全に定まる」ことを示している。

4.2 2. ラグランジュ剰余項

f が $n+1$ 回微分可能なとき、a と x の間のある ξ が存在して：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

使い方：$R_n(x)$ の大きさを評価するには $|f^{(n+1)}|$ の最大値で上から抑える。例えば e^x の $x \in [0,1]$ での n 次近似の誤差は $e/((n+1)!) \le 3/(n+1)!$。

4.3 3. 主要なマクローリン展開

関数	展開	収束半径
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	∞
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	∞
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$	∞
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$	1（$-1 < x \le 1$）
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	1（$\lvert x\rvert < 1$）
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	1（$\lvert x\rvert < 1$）

収束半径はダランベール比判定法 $R = \lim_{k\to\infty} |a_k/a_{k+1}|$ で求まる。

4.4 4. 応用：極限の計算

テイラー展開は lim の「0/0 型」を処理する 強力 な道具である。

例 1：$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ より $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + O(x^5)$、したがって極限は $-1/6$。

例 2：$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ より分子は $\frac{x^2}{2} + O(x^3)$、極限は $1/2$。

4.5 5. 解析的関数と滑らかな関数

C^∞（無限回微分可能）であっても、テイラー展開が元の関数と一致しない例が存在する：

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

この関数は $f^{(k)}(0) = 0$ すべての k に対して成立するため、テイラー展開は恒等的に 0 だが $f \not\equiv 0$。全ての点でテイラー展開が収束して一致する関数を解析的という。

5 見分け方

- $x \to 0$ の極限 0/0 型 → マクローリン展開で分子・分母を展開
- $x = a$ 近くの挙動 → a まわりのテイラー展開

- 近似誤差を定量評価 → ラグランジュ剰余項で $|R_n(x)|$ を上から抑える
- 無限和として書かれた式 → 収束半径を確認

6 どこまで成り立つか

テイラー展開は実数解析の域を超えて複素解析でも成立し、複素平面での収束半径は「近い特異点（極・分岐点）までの距離」で決まる。多変数では偏微分を使ったテイラー展開が成立し、行列のテイラー展開（行列指数関数 $e^A = \sum A^k/k!$）が微分方程式の解を与える。

7 最終形

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (\text{ラグランジュ[剰余項/じょうよこう]})}$$

$$\boxed{e^x = \sum \frac{x^k}{k!}, \quad \sin x = \sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}}$$

8 一言でいうと

テイラー展開は「1 点の局所的な微分情報から関数全体を再構成しようとする試み」であり、係数 $f^{(k)}(a)/k!$ はその一意な答えだ—ただし収束は別問題であり、解析的でない関数では局所情報だけでは関数全体を完全に回復できない。

9 関連リンク

→ 講義 **微分法の基本** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分法の基本-講義/

→ 講義 **極限と連続** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/極限と連続-講義/

→ 講義 **フーリエ変換の入口** lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/フーリエ変換の入口-講義/