フーリエ変換の入口

1 導入

この講義で最重要なのは、**関数を時間領域の波形としてだけでなく、どんな周波数の波がどれだけ入っているかという周波数領域でも見ること**です。

フーリエ変換は公式だけ見ると 抽象的 ですが、中身は「複雑な波形を 単純 な波へ分解する」ことです。

2 用語と定義

フーリエ変換 は、関数 $f(x)$ を周波数の関数 $\hat{f}(\omega)$ に写す変換です。
代表的な 形 は

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

です。

3 方針

波形を 直接追う と複雑でも、正弦波や複素指数関数に分解すると構造が見えやすくなる、と 考 えます。

→ 講義 **複素数と複素平面** lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/複素数と複素平面-講義/

→ 講義 **波の基本** lecture physics waves
https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/波の基本-講義/

4 直感的な説明

音で 考 えると、波形は時間に対する空気の揺れですが、耳は高音と低音の混ざり具合としても聞いています。フーリエ変換は、この「どの音がどれだけ入っているか」を数式にしたものです。

5 厳密な説明

ここからは $e^{i\omega x}$ や複素共役の見方を使うので、複素数の 極形式 やオイラーの公式がまだ曖昧なら先にこちらを見るとつながりやすいです。

→ 講義 **複素数と複素平面** lecture math algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/algebra/複素数と複素平面-講義/

$e^{i\omega x}$ は周波数 ω を持つ基本的な波です。ここで大事なのは、違う周波数どうしは積分すると打ち消し合いやすい、ということです。たとえば有限区間のフーリエ 級数 では

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx$$

を考えると、$m \neq n$ のときは 0 になり、$m = n$ のときだけ値が残ります。つまり $e^{-i\omega x}$ を掛けて積分するのは、「周波数 ω の成分だけを抜き出したい」という操作です。ここでは内積に似た重なり具合を測っている、と見ると自然です。

その連続版として

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,dx$$

を定義します。したがって $f(x)$ に $e^{-i\omega x}$ を掛けて全体で積分すると、f の中に周波数 ω の成分がどれだけ含まれているかを取り出せます。

さらに微分は周波数領域で掛け算に変わるので、微分方程式の処理が見通しよくなります。これを実際に確かめると、

$$\hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x}\,dx$$

です。部分積分を使うと

$$\hat{f}'(\omega) = \Big[f(x) e^{-i\omega x} \Big]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,dx$$

です。ここで端の項が 0 になるだけ十分に $f(x)$ が減衰するとすれば、

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

を得ます。つまり、微分は周波数領域では $i\omega$ を掛ける操作に変わります。

6 具体例

$f(x) = \cos ax$ は、周波数 a と $-a$ の成分だけからなる波です。したがって、時間領域では単純な余弦波ですが、周波数領域でも「2 本の鋭い成分」として非常に単純に見えます。

7 別の見方

7.1 解析的な見方

微積分では関数を点ごとの値として見ましたが、フーリエ変換では関数を「周波数の重ね合わせ」として見ます。この見方は波動や信号に非常に強いです。

7.2 線形代数・行列による見方

有限個の点だけを扱う離散版では、フーリエ変換は行列を掛けることと同じです。したがって連続のフーリエ変換も、「基底を時間領域から周波数領域へ入れ替える変換」と見られます。

この見方の利点は、フーリエ変換を特殊な積分公式としてではなく、座標変換として理解できることです。

7.3 作用素による見方

微分という作用素は、$e^{i\omega x}$ に対して

$$\frac{d}{dx}e^{i\omega x} = i\omega e^{i\omega x}$$

となります。つまり $e^{i\omega x}$ は微分作用素の固有関数です。だからフーリエ変換をすると、微分方程式が周波数ごとの代数方程式へ変わります。

この見方の利点は、なぜフーリエ変換が微分方程式に強いのかを、固有値問題として整理できることです。

8 見分け方

- 波、振動、周期性が主役ならフーリエ変換を疑う
- 微分方程式を周波数ごとに分けて見たいときに向く
- 局所の情報より全体の振動構造を見たいときに効く

9 どこまで成り立つか

周期関数ではフーリエ級数、非周期関数ではフーリエ変換を使います。また、どんな関数でも単純に変換できるわけではなく、積分の収束や関数空間の条件が関わります。とくに $\hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$ は、部分積分の端の項が消えることを前提にしています。したがって $f(x)$ が無限遠で十分に小さくならない場合には、そのままでは使えません。

10 関連リンク

→ 講義 **ラプラス変換の入口** lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/ラプラス変換の入口-講義/

→ 講義 **波の基本** lecture physics waves
https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/波の基本-講義/

→ 講義 **干渉と回折** lecture physics waves
https://study.bem130.com/lecture/physics/waves/干渉と回折-講義/