ベクトル解析の入口

1　導入

この講義で最重要なのは、ベクトル解析では、数を返す関数とベクトルを返す関数を区別し、その変化を見るために勾配・発散・回転という 3 つの道具を使うことです。

多変数の関数を学んだあとで混乱しやすいのは、「偏微分は計算できるが、それが何を見ているのか」が見えにくいことです。ここでは、場の変化を読む言葉として勾配・発散・回転を整理します。

2　用語と定義

スカラー場 (Scalar field) とは、各点に 1 つの数を対応させる関数です。

ベクトル場 (Vector field) とは、各点に 1 つのベクトルを対応させる関数です。

勾配 (Gradient) とは、スカラー場 f に対して

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

で定義されるベクトルです。

3　方針

まず、なぜ偏微分を並べたものが勾配になるのかを見ます。そのあと、ベクトル場の広がり具合を発散、回る傾向を回転として読む理由を整理します。

→ 講義 偏微分と重積分 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/偏微分と重積分-講義/

→ 講義 ベクトルと内積 lecture math vector
https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルと内積-講義/

4　直感的な説明

たとえば温度の分布 $f(x, y, z)$ を考えると、一番急に温度が上がる向きと、その増え方の大きさをまとめたものが勾配です。

また、流体の速度場を考えると、その点の近くで湧き出しているか吸い込んでいるかを発散が、渦のように回ろうとしているかを回転が表します。

5 厳密な説明

5.1 1. なぜ勾配はこの定義か

微小な変位 $\Delta\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ に対して、f の変化量は 1 次近似で

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

です。これは

$$\Delta f \approx \nabla f \cdot \Delta\mathbf{r}$$

と書けます。つまり勾配は、「どちらへ少し動くとどれだけ値が変わるか」を 1 本のベクトルにまとめたものとして自然に現れます。

とくに単位ベクトル $\mathbf{u}$ の向きに微小に動くなら

$$\Delta\mathbf{r} = h\mathbf{u}$$

なので、

$$\Delta f \approx \nabla f \cdot (h\mathbf{u}) = h(\nabla f \cdot \mathbf{u})$$

です。したがって方向微分は

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

となります。つまり勾配は、方向微分を全部まとめているベクトルです。

5.2 2. 発散

ベクトル場 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ に対して

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

を発散と呼びます。これは、各方向の成分がその方向にどれだけ増えているかを足し合わせたもので、局所的な湧き出しや吸い込みを測ります。

この式が自然なのは、小さい直方体から出る流束を考えると見えます。x 方向だけ見ると、左右の面から出る流量の差は 1 次近似で

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

です。これを y, z 方向でも同様に足し合わせると、

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Delta V$$

となります。したがって単位体積あたりの正味の流出量が発散です。

5.3 3. 回転

ベクトル場 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ に対して

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

を回転と呼びます。これは場が近くでどれだけ回ろうとしているかを表す量です。

たとえば xy 平面で $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$ を考えると、小さい長方形の周りの循環は 1 次近似で

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Delta x \, \Delta y$$

になります。したがって z 方向の回転の成分を

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

と定義するのが自然です。3 次元ではこれを各方向へ拡張したものが $\nabla \times \mathbf{F}$ です。

6 どこまで成り立つか

ここでは 3 次元の直交座標で、十分に微分可能な場を前提にしています。したがって極座標や球座標では同じ記号でも成分表示が変わりますし、微分可能性がない場ではここでの式をそのまま使えません。

7 見分け方

- 温度や電位のように 1 つの数が与えられているなら、まずスカラー場として勾配を考えます。
- 流速や力場のように向きと大きさがあるなら、ベクトル場として発散や回転を疑います。
- 各点で「外へ広がるか」「回るか」を問う問題は、ベクトル解析の言葉で整理できます。

8 最終形

$$\boxed{\Delta f \approx \nabla f \cdot \Delta \mathbf{r}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{F} = \text{[場/ば]の[局所的/きょくしょてき]な[回転/かいてん]を[表/あらわ]す}}$$

9 一言でいうと

- ベクトル解析は、多変数の場を微分して、その変化の意味を読むための言葉です。