ラプラス変換の入口

1 導入

この講義で最重要なのは、ラプラス変換は微分方程式を積分を含む別の式に移すだけでなく、微分を代数的な操作へ変えて初期条件を一緒に処理できることです。

2 用語と定義

ラプラス変換 Laplace transform は

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

で定義されます。

3 方針

時間に関る関数をそのまま解くのではなく、変換して s の式へ移し、代数的に整理してから逆変換で戻す、と考えます。

→ 講義 微分方程式の入口 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分方程式の入口-講義/

→ 講義 フーリエ変換の入口 lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/フーリエ変換の入口-講義/

4 直感的な説明

微分方程式が難しいのは、関数とその導関数が同時に出るからです。ラプラス変換は、それを $F(s)$ という 1 つの対象へまとめて移し、微分を掛け算へ変えます。

5 厳密な説明

重要な性質は

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0)$$

です。ただし $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ です。

これがなぜ成り立つかを部分積分で確かめます。

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

で、$u = e^{-st}$, $dv = f'(t)\, dt$ と置くと

$$\mathcal{L}[f'](s) = \Big[e^{-st} f(t)\Big]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

です。ここで $e^{-st}f(t) \to 0$ が成り立つだけ十分に収束するとすれば

$$\Big[e^{-st} f(t)\Big]_0^{\infty} = 0 - f(0)$$

だから

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0)$$

を得ます。

したがって

$$f'(t) + f(t) = 0, \qquad f(0) = 1$$

を変換すると

$$(sF(s) - 1) + F(s) = 0$$

です。よって

$$(s+1)F(s) = 1, \qquad F(s) = \frac{1}{s+1}$$

となり、逆変換で

$$f(t) = e^{-t}$$

を得ます。

6 具体例

微分方程式そのものでは導関数が主役ですが、ラプラス変換した後は $F(s)$ についての分数式になります。ここが「解析の問題を代数の問題へ移す」という核心です。

7 別の見方

7.1 解析的な見方

フーリエ変換が周波数の分解に強いのに対して、ラプラス変換は初期値問題の整理に強い道具です。減衰や指数関数的な挙動を含む問題とも相性がよいです。

7.2 作用素による見方

微分という作用素は、ラプラス変換の後では s を掛ける操作へ近い形になります。ただしフーリエ変換と違って、初期値 $f(0)$ が一緒に現れるので、初期値問題に強いわけです。

8 見分け方

- 初期値つきの線形微分方程式が出たらラプラス変換を疑う

- 微分を掛け算に変えたいときに向く
- 周波数分解そのものが主役ならフーリエ変換、初期条件つきの方程式ならラプラス変換を先に考える

9　どこまで成り立つか

ここで使った

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0)$$

は、部分積分が正当化でき、かつ $e^{-st}f(t)$ が無限遠で 0 に行く範囲で成り立ちます。したがって、どんな関数にも無条件に使えるわけではありません。

10　関連リンク

→ 講義 **微分方程式の入口** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分方程式の入口-講義/

→ 講義 **フーリエ変換の入口** lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/フーリエ変換の入口-講義/