積分方程式の入口

1 導入

この講義で最重要なのは、**積分方程式では未知数が積分の中に入っており、微分方程式を積分して書き換えた形として現れることが多い**ということです。
微分方程式に慣れていると、「未知関数が積分記号の中に入る」と急に見慣れない形に見えます。ここでは、積分方程式を微分方程式の別表現として見る視点から入ります。

2 用語と定義

積分方程式 Integral equation とは、未知関数が積分の中に現れる方程式です。
核 Kernel とは、積分方程式

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt$$

に出てくる $K(x,t)$ のことです。

3 方針

まず、初期値問題の微分方程式を積分して積分方程式へ書き換えます。そのあと、核が未知関数をどう重ね合わせるかを見て、微分方程式との関係を整理します。

4 直感的な説明

微分方程式が「その点での変化率」を言うのに対して、積分方程式は「それまでの全体の寄与を足し合わせた結果」を言います。
だから記憶や履歴を持つ現象では、積分方程式の形が自然に出てきます。

5 厳密な説明

5.1 1. 微分方程式から積分方程式へ

初期値問題

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(a) = y_0$$

を考えます。これを a から x まで積分すると

$$\int_a^x y'(s)\,ds = \int_a^x f(s, y(s))\,ds$$

です。微積分学の基本定理より

$$y(x) - y(a) = \int_a^x f(s, y(s))\, ds$$

だから

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(s, y(s))\, ds$$

を得ます。これが積分方程式です。

5.2 2. 線形の積分方程式

たとえば

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\, dt$$

では、$f(x)$ が外から与えられる部分で、積分項が $y(t)$ の全体の影響を集める部分です。$K(x,t)$ は「点 t の値が、点 x にどれだけ影響するか」を表します。

5.3 3. 具体例

$$y'(x) = y(x), \qquad y(0) = 1$$

なら

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(s)\, ds$$

と書けます。これをさらに微分し直せば、もとの微分方程式へ戻ります。つまり積分方程式と微分方程式は、条件のもとでは往復できます。

6 見分け方

- 未知関数が積分記号の中に入っていたら、積分方程式です。
- 初期値問題を積分した形が現れたら、微分方程式との対応を考えます。
- 核 $K(x,t)$ が出たら、「どの点からどの点へ影響が伝わるか」を表していると読みます。

7 どこまで成り立つか

ここでは入口として、微分方程式から積分方程式へ移る基本形だけを扱いました。解の存在や一意性、核の性質による違いまで進むには、さらに解析学の道具が必要です。

8 最終形

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)),\, y(a) = y_0 \Rightarrow y(x) = y_0 + \int_a^x f(s, y(s))\, ds}$$

$$\boxed{y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t)\, dt}$$

9 一言でいうと

- 積分方程式は、未知関数を積分で重ね合わせて決める方程式です。