線積分と面積分の入口

1　導入

この講義で最重要なのは、**線積分を「道に沿って足す積分」、面積分を「面を貫く量を足す積分」として理解すること**です。

普通の積分は 1 本の区間に沿って数を足します。しかし場を考えると、曲線に沿って仕事を足したり、面を通る流量を足したりしたくなります。そこで線積分と面積分が必要になります。

2　用語と定義

線積分 Line integral とは、曲線に沿って量を足していく積分です。

面積分 Surface integral とは、面を通る量を面の上で足していく積分です。

ベクトル場 $\mathbf{F}$ に対する線積分は

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

で、面積分は

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

で書きます。

3　方針

まず、なぜ線積分に内積が入るかを見ます。そのあと、なぜ面積分では法線方向の成分だけを数えるのかを整理します。

→ 講義 ベクトル解析の入口 lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/ベクトル解析の入口-講義/

→ 講義 積分法の基本 lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/積分法の基本-講義/

4　直感的な説明

山道を歩いて風に押されることを考えると、仕事に効くのは道に沿った風の成分だけです。だから線積分では $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ が自然です。

いっぽう、網を通り抜ける風の量を考えると、面に垂直な成分だけが効きます。だから面積分では $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ が自然です。

5 厳密な説明

5.1 1. 線積分

曲線 C を小さく分けたとき、各区間での微小変位を $\Delta\mathbf{r}$ とします。場 $\mathbf{F}$ がする仕事の近似は

$$\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

です。これを全部足して極限を取ると

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

になります。

5.2 2. 面積分

面 S を小さい面積要素 ΔS に分け、単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とします。この小片を通る流量の近似は

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{n}\,\Delta S)$$

です。これを全部足して極限を取ると

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

になります。ここで

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$$

です。

5.3 3. 電磁気とのつながり

電場や磁場の流束は面積分です。したがってガウスの法則

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

は面積分の言葉で書かれます。

またアンペールやファラデーで現れる

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

は、閉曲線に沿った線積分です。

6 別の見方

6.1 解析的な見方

線積分も面積分も、普通の積分を曲線や曲面に広げたものです。

6.2 幾何的な見方

線積分は道に沿って効く成分を足し、面積分は面を貫く成分を足します。

6.3 物理的な見方

線積分は仕事や循環、面積分は流束や貫通量を表します。

7 見分け方

- 道に沿って何かを足すなら線積分です。
- 面を通る量を数えるなら面積分です。
- 電磁気で $\oint \cdots d\mathbf{r}$ が出たら線積分、$\iint \cdots d\mathbf{S}$ が出たら面積分として読みます。

8 どこまで成り立つか

ここでは向きのある滑らかな曲線と曲面を前提にしています。向きを変えると符号が変わるので、法線や経路の向きは固定して考える必要があります。

9 最終形

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}$$

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}$$

10 一言でいうと

- 線積分は道に沿って効く量を足す積分で、面積分は面を貫く量を足す積分です。