局所線型近似と微分可能性

1 導入

この講義の核心は、微分を「接線の傾き」だけでなく、「関数を基準点の近くで線型な式へ置き換える操作」として理解することである。

→ 講義 線型性の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/

2 直感的な説明

曲線を近くで拡大すると、十分に滑らかな場所では直線のように見える。この直線が局所線型近似である。

基準点を a とすると、近似式は

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

である。保存されるのは $x = a$ での値と傾きである。変わるのは、曲線の曲がりを含む高次の情報である。

3 厳密な説明

f が a で微分可能であることは、

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$$

と書け、さらに

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

が成立することと同値である。つまり、誤差 $r(h)$ は h より小さい次数で消える。

4 具体例

問題として $\sqrt{4.1}$ を近似する。$f(x) = \sqrt{x}$、$a = 4$ とすると、$f(4) = 2$、$f'(4) = 1/4$ である。したがって

$$\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x-4)$$

であり、$x = 4.1$ を代入して

$$\sqrt{4.1} \approx 2.025$$

を得る。この例は、導関数が近似の係数として働くことを確認している。

5 関連(かんれん)リンク

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

6 演習(えんしゅう)リンク

→ 基本演習 **局所線型近似と微分可能性** exercise math calculus
https://study.bem130.com/exercise/math/calculus/局所線型近似と微分可能性-基本演習/