微分積分の応用

1 導入

この講義の核心は、**微分は局所量、積分は累積量、そして微分積分学の基本定理はその両者を往復する橋である**という役割分担を先に固定することである。

応用問題で混乱が生じる理由は、公式が不足しているからではなく、問題が何を問うているかの判定が曖昧なためである。接線、増減、極値、近似は局所量であり、面積、体積、総量、平均値、変位は累積量である。この区別を明確化すると、微分か積分か、あるいは両方を使用するかが判断しやすくなる。

2 何を判定するページか

このページでは、問題を次の 3 群に分類する。

1. 一点や近傍での情報を問う問題
2. 区間や領域にわたる総量を問う問題
3. 導関数を積分して総変化量を求めるなど、微分と積分を往復する問題

目的は、公式を並列に暗記することではなく、問題文の要求を読解して方針を選択できるようにすることである。

3 なぜこの方針を選択するか

微分は、関数を一点近傍で一次関数に近似する操作である。したがって、接線、瞬間速度、増減、極値、局所近似の問題に適合する。

積分は、小さな寄与を区間全体で合算する操作である。したがって、面積、体積、総移動距離、質量、平均値の問題に適合する。

微分積分学の基本定理により、導関数の積分は端点差へ還元される。そのため、運動や最適化では微分と積分が分離せず、局所と全体を往復する。

4 直感的な説明

坂道の傾きを知りたいなら、その地点の周辺だけを拡大すればよい。これが微分の発想である。一方、谷に貯まった水量や、曲線の下の面積を求めるには、小さな断片を全体で合算する必要がある。これが積分の発想である。

速度から変位を求める問題では、瞬間ごとの変化率を先に観察し、その後に時間全体で合算する。この往復が、微分と積分を同じ体系にまとめる理由である。

5 厳密な説明

5.1 微分を選択する局面

$f'(x)$ は差商の極限であり、x の微小変化に対する $f(x)$ の変化率を表す。したがって、接線、法線、増減、極値、近似では微分が主役になる。

$f'(x) > 0$ の区間では f は増加し、$f'(x) < 0$ の区間では f は減少する。極値の候補は、$f'(x) = 0$ となる点、または微分不能な点である。ただし、$f'(a) = 0$ は極値の必要条件ではあっても十分条件ではない。符号変化、二階微分、あるいは問題固有の構造を追加で確認する。

一次近似

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

は、微分を使用する理由をよく表している。関数を一点近傍で線形化できるから、複雑な曲線でも接線で近似できる。

5.2 積分を選択する局面

積分は区間ごとの寄与を合算する操作である。連続関数 $f(x) \geq 0$ に対して、

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は曲線と x 軸で囲まれる面積を与える。しかし積分の役割は面積に限らない。速度を積分すれば変位、密度を積分すれば質量、流量を積分すれば総量となる。

平均値も積分の応用である。区間 $[a, b]$ における平均値 m は、総量が一致する定数関数として

$$m(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

を満たす。したがって

$$m = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

である。平均値は代表値ではなく、「同じ総量を与える一定値」として定義される。

5.3 微分と積分を往復する局面

速度 $v(t)$ が与えられたとき、変位は

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

で与えられる。さらに $v(t) = s'(t)$ なら、微分積分学の基本定理により

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

となる。ここでは導関数という局所量を積分して全体変化へ戻している。

最適化でも往復が現れる。面積や体積を表す関数を構成した後、その極値を微分で判定する。したがって、積分が問題設定を担い、微分が最適条件を担う場合もある。

6 具体例

6.1 極値の判定例

$f(x) = x^3 - 3x$ とする。このとき

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

である。したがって極値の候補は $x = -1, 1$ である。符号を確認すると、$x < -1$ で $f'(x) > 0$、$-1 < x < 1$ で $f'(x) < 0$、$x > 1$ で $f'(x) > 0$ である。よって $x = -1$ で極大、$x = 1$ で 極小 となる。
この例が代表するのは、「 局所量 の符号から全体の増減を判定する」という微分の 標準的 役割である。

6.2 変位と移動距離の対照例

速度 $v(t) = t - 1$ を $0 \le t \le 2$ で考える。変位は

$$\int_0^2 (t-1)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^2 = 0$$

である。しかし移動距離は

$$\int_0^2 |\,t-1\,|\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt + \int_1^2 (t-1)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

である。速度を積分した結果は変位であって、移動距離ではない。この差異は、定積分が符号つき累積量であることに由来する。

6.3 平均値の例

$f(x) = x^2$ の区間 $[0, 3]$ における平均値を求めると、

$$\frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3$$

となる。ここで平均値 3 は、各点の平均というより、同じ総面積を与える一定高さである。

7 典型の誤用

第一に、$f'(a) = 0$ だけで極値と断定してはならない。$f(x) = x^3$ は $f'(0) = 0$ だが、$x = 0$ で極値を持たない。
第二に、速度の積分を移動距離と同一視してはならない。負の速度が存在する場合、変位と移動距離は一致しない。
第三に、面積を積分で求める際、上側の関数と下側の関数の 順序 を確認しなければならない。$\int_a^b (f-g)\,dx$ は常に面積とは限らず、符号つき差になる。

8 判定基準

問題文の要求	主な道具	確認すべきこと
接線、瞬間速度、増減、極値	微分	一点近傍の局所量か
面積、体積、質量、平均値	積分	小片を合算する問題か
変位、総変化量	積分と基本定理	被積分関数が導関数の形か
最適化	微分、場合により積分	先に目的関数を構成したか
距離か変位か	積分	絶対値が必要か

9 どこまで成立するか

微分による極値判定は、微分可能性や符号変化の確認を必要とする。二階微分判定も有効だが、二階導関数が 0 になる場合は結論を保留する必要がある。

積分を面積として解釈するには、関数の符号と区間の分割に注意する必要がある。負の値を含む場合、定積分は幾何的面積ではなく符号つき累積量である。

実際の応用問題では、微分だけ、積分だけで完結しない場合がある。その場合は、問題設定に積分、最適条件に微分というように、役割を分離して処理する。

10 最終形

局所量を問うなら微分，累積量を問うなら積分，導関数の積分は総変化量へ還元する

重要なのは、この文を暗記することではなく、問題文の要求を局所・累積・往復のいずれかへ分類することである。

11 演習リンク

→ 標準演習 **微分積分の応用と発展** exercise math calculus
https://study.bem130.com/exercise/math/calculus/微分積分の応用と発展-標準演習/

12 関連リンク

→ 講義 **微分法の基本** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分法の基本-講義/

→ 講義 **微分公式と計算法** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分公式と計算法-講義/

→ 講義 **積分法の基本** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/積分法の基本-講義/

→ 講義 **積分公式と計算法** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/積分公式と計算法-講義/

→ 講義 **微分積分学の基本定理** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分学の基本定理-講義/