

きょくげん れんぞく 極限と連続

1 導入

この講義の核心は、「極限」とは値に到達することではなく「いくらでも近づけられる」ことであり、連続とはその近づきが関数値と一致することであるという区別だ。直感だけで「近づく」を扱うと矛盾が生じる。19世紀にコーシーとワイエルシュトラスが ϵ - δ 論法を整備したのは、「連続だが至るところで微分不可能」「連続だが面積が計算できない」といった直感を裏切る関数が次々と発見されたためである。

2 用語と定義

2.1 極限 Limit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

とは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

となることである (ϵ - δ 論法)。

記号の意味： ϵ (epsilon) は出力の許容誤差、 δ (delta) は入力の調整量。「どんなに厳しい精度を要求されても ($\epsilon > 0$)、入力を十分絞れば (δ を小さく取れば) 出力の誤差を ϵ 未満に抑えられる」という主張である。

2.2 連続 Continuity

f が a で連続であるとは以下の3条件が成立することである：

1. $f(a)$ が定義されている
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在する
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

3条件を分離して書くのは、違反するポイントが不連続の種類を決めるからである。

2.3 片側極限 One-sided limit

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

は、 x を a より小さい側から a へ近づけたときに $f(x)$ が L へ収束することを表す。同様に

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

は、 x を a より大きい側から近づける場合である。

両側極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在すること、左極限・右極限が存在して一致することは同値である。跳躍不連続では、この一致が破れる。

3 方針

極限の計算では「直接代入」→「因数分解で約分」→「はさみうち」の順に試みる。連続性の確認では3条件を別々に確認する。

4 厳密な説明

4.1 1. ϵ - δ 論法の最小例

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$$

を ϵ - δ 論法で証明する。目標は

$$|3x - 1 - 5| < \epsilon$$

を実現する δ を構成することである。左辺を整理すると

$$|3x - 1 - 5| = 3|x - 2|$$

だから、 $|x - 2| < \epsilon/3$ なら十分である。したがって

$$\delta = \frac{\epsilon}{3}$$

と設定すれば、

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |3x - 1 - 5| = 3|x - 2| < 3\delta = \epsilon$$

となる。この計算で重要なのは、 δ を先に当てるのではなく、欲しい不等式から逆向きに必要条件を組み立てることだ。

4.2 2. 極限の計算技法

直接代入： f が a で連続なら $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。多項式・有理関数（分母 $\neq 0$ ）で直接使える。

因数分解法： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 。分子を因数分解すると $\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$ ($x \neq 1$)、極限は $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ 。

はさみうちの定理 (Squeeze theorem)： $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ なら

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L。$$

例： $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ 。 $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$ かつ $\lim_{x \rightarrow 0} (\pm |x|) = 0$ より、極限は 0。

重要な基本極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

4.3 3. 不連続の分類

種類	特徴	例	修復可能性
除去可能不連続	極限は存在するが $f(a)$ と不一致	$\frac{x^2-1}{x-1}$ の $x=1$	値を再定義すれば連続化
跳躍不連続	左・右極限が存在するが不一致	$\text{sgn}(x)$ の $x=0$	修復不可能
本質的不連続	片側極限が存在しない	$\sin(1/x)$ の $x=0$	修復不可能
無限不連続	極限が $\pm\infty$	$1/x$ の $x=0$	修復不可能

4.4 4. 連続関数の重要性質

中間値定理 (Intermediate Value Theorem) : f が $[a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ なら、 $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 c に対して $f(\xi) = c$ となる $\xi \in (a, b)$ が存在する。

意味 : 連続な関数は値を「飛ばす」ことができない。 $f(0) < 0$ かつ $f(1) > 0$ なら零点が $[0, 1]$ に存在する (二分法の理論的根拠)。

最大値・最小値定理 : $[a, b]$ で連続な f は最大値と最小値を必ず達成する (コンパクト性の帰結)。

4.5 5. なぜ ε - δ が必要か

「近づく」を言葉だけで扱おうと循環する。例 : 「 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき L に近づく」 = 「 x が a に近いとき $f(x)$ は L に近い」 — 「近い」が循環。

ε - δ は「近い」を量化する : 「 $|x - a| < \delta$ のとき $|f(x) - L| < \varepsilon$ 」。これで近さの制御を不等式に帰着させ、数学的に操作できる。

5 判定基準

- 分母が 0 になる → 因数分解で約分できるか確認
- 0・有界量の形 → はさみうち
- $f(a)$ が定義されていない → 極限と連続性を別に確認
- 零点の存在を示したい → 中間値定理

6 どこまで成り立つか

ε - δ 論法は実数の完備性 (コーシー列が収束する) を前提とする。有理数の範囲では成立しない定理がある ($\sqrt{2}$ の零点など)。多変数への拡張は「方向によらず極限が一致する」というより強い条件になる。

7 最終形

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 [0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon]$$

f が a で [連続/れんぞく] \Leftrightarrow ①定義②極限存在③一致

8 一言でいうと

極限とは「いくらでも近づけられる」を不等式で管理する記法であり、連続とは関数値と極限の一致—
中間値定理により「連続=値を飛ばさない」ことが保証される。

9 演習リンク

→ 基本演習 極限と連続 [exercise](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/calculus/極限と連続-基本演習/>

10 関連リンク

→ 講義 微分法の基本 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分法の基本-講義/>

→ 講義 微積分ポータル [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微積分ポータル-講義/>

→ 講義 微分積分学の基本定理 [lecture](#) [math](#) [calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分学の基本定理-講義/>