積分の定義：リーマン和と符号付き面積

1 導入

この講義の核心は、定積分を公式ではなく、小さな寄与を足し合わせた総和の極限として理解することである。

2 定義

区間 $[a,b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

と分割し、各小区間で代表点 ξ_i を取る。リーマン和は

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

である。分割を細かくした極限が存在するとき、その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く。

3 符号付き面積

定積分は、x 軸の上を正、下を負として数える。したがって、実際の面積を求めるときは、符号が変わる点で区間を分割し、絶対値を用いる。

4 具体例

$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ である。しかし、実面積は

$$\int_{-1}^{1} |\,x\,|\,dx = 1$$

である。この例は、定積分と面積を同一視してはならないことを確認している。

5 演習リンク

→ 基本演習 **リーマン和と定積分** exercise math calculus
https://study.bem130.com/exercise/math/calculus/リーマン和と定積分-基本演習/

6 関連リンク

→ 講義 **微分積分学の基本定理** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分学の基本定理-講義/