積分公式と計算法

1 導入

この講義の核心は、**積分公式を微分公式の逆向きとして導出し、被積分関数の構造から置換積分・部分積分・直接公式を選択する基準を確立する**ことにある。

積分は面積公式の暗記ではない。不定積分は原始関数の探索であり、定積分は局所的寄与の総和である。微分積分学の基本定理により、多くの定積分は原始関数の端点差へ還元される。そのため、原始関数をどう構成するかが積分計算の中心になる。

2 何を処理するページか

このページでは、初等関数の積分公式、置換積分、部分積分、有理関数や逆三角関数に接続する基本形を扱う。焦点は手順の列挙ではなく、被積分関数を観察したときに次を判定することである。

- 既知の微分公式を逆向きに使用できるか。
- 内側の関数とその導関数が同時に存在するか。
- 積の微分を逆向きに使用して部分積分へ移行できるか。
- 分母の導関数が分子に現れるか。
- 初等関数では原始関数を記述できない可能性があるか。

3 方針

積分では、まず微分公式の逆向きで直接処理できるかを確認する。次に、連鎖律の逆向きとして置換積分を検討し、積の微分の逆向きとして部分積分を検討する。有理関数では因数分解や部分分数分解を使用し、三角関数や根号を含む形では置換を選択する。

4 線形性と積分定数

積分の線形性は、微分の線形性から従う。$F' = f$、$G' = g$ なら、

$$(aF + bG)' = af + bg$$

である。したがって、

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

である。ただし不定積分では積分定数を一つにまとめる。$C_1 + C_2$ のように複数の定数を保持しても、任意定数としては一つの C に吸収される。

5 直接公式の導出

積分公式は、候補となる原始関数を微分して確認することで導出される。$n \neq -1$ なら、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$$

であるため、

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

である。$n = -1$ の場合は分母が 0 になるため、この公式は適用できない。かわりに

$$\frac{d}{dx}\ln|\,x\,| = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

から

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|\,x\,| + C$$

を得る。絶対値が必要なのは、$1/x$ が正の範囲と負の範囲の両方で定義されるためである。

指数関数では、

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \qquad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

より、

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

を得る。a^x の公式では $a > 0$ かつ $a \neq 1$ が必要である。

三角関数では、

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x, \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

から、

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

となる。また

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

だから、

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

である。

6 置換積分の導出

置換積分は連鎖律の逆向きである。$F' = f$ とし、$u = g(x)$ とおくと、

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x)$$

である。したがって、

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

となる。被積分関数の中に「内側の関数」と「その導関数」が同時に存在するとき、置換が自然である。

例として、

$$\int 2xe^{x^2}\,dx$$

を検討する。$u = x^2$ とすると $du = 2x\,dx$ である。したがって、

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

である。定積分では上下限も変換する。たとえば

$$\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \int_0^1 e^u\,du = e - 1$$

となる。$x = 0$ で $u = 0$、$x = 1$ で $u = 1$ になるためである。

7 部分積分の導出

部分積分は積の微分の逆向きである。

$$(fg)' = f'g + fg'$$

の両辺を積分すると、

$$fg = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$$

である。したがって、

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

を得る。部分積分は、積の一方を微分すると簡単になり、他方を積分しても複雑になりすぎない場合に有効である。

例として、

$$\int xe^x\,dx$$

を処理する。$f = x$、$g' = e^x$ と選択すれば、$f' = 1$、$g = e^x$ である。したがって、

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

となる。対照例として $\int x^2e^x\,dx$ では、部分積分を一回で 終了 できない。多項式を微分で次数を下げるため、反復が必要になる。

8　対数型と逆三角型

分母の導関数が分子に比例して存在する場合は、対数型を疑う。$g(x) \neq 0$ で g' が現れるなら、

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|\,g(x)| + C$$

である。例として、

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + C$$

である。

逆三角型は逆関数の微分から導出される。

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

より、

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

を得る。

9　有理関数の入口

有理関数とは多項式の商である。分子の次数が分母の次数以上なら、まず多項式除法で整式部分と真分数部分へ分解する。分母が因数分解できる場合は、部分分数分解が有効である。

たとえば、

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

である。したがって、

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|\,x-1\,| - \frac{1}{2}\ln|\,x+1\,| + C$$

を得る。この方法は有理関数に特化した代数的分解であり、すべての関数に適用できるわけではない。

10　判定基準

被積分関数の構造	選択する方針	根拠
基本関数そのもの	直接公式	微分公式の逆向き
$f(g(x))g'(x)$	置換積分	連鎖律の逆向き
異種の関数の積	部分積分	積の微分の逆向き
$g'(x)/g(x)$	対数型	$(\ln\lvert g\rvert)' = g'/g$
有理関数	除法・部分分数分解	代数的分解

根号・三角形	置換または三角置換	定義域と恒等式

11　典型の誤用

第一に、$\int f(g(x))\,dx$ を機械的に $F(g(x))$ としてはならない。連鎖律の逆向きには $g'(x)$ が必要である。

第二に、部分積分でどちらを微分し、どちらを積分するかを無作為に選択してはならない。微分で簡単になる因子を優先する。

第三に、原始関数が常に初等関数で記述できると仮定してはならない。たとえば

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

は初等関数では原始関数を記述できない。この事実は積分が失敗したことではなく、関数の表現体系に限界があることを意味する。

12　どこまで成立するか

このページの公式は、連続な範囲、分母が 0 でない範囲、置換が有効な範囲を前提とする。広義積分では、原始関数が存在しても定積分が収束するとは限らない。

積分の計算は、微分方程式では変数分離や積分因子に接続し、多変数微積分では重積分や変数変換へ拡張される。ただし、このページでは一変数の公式導出と計算方針に限定する。

13　演習リンク

→ 基本演習 **積分法と計算法** exercise math calculus
https://study.bem130.com/exercise/math/calculus/積分法と計算法-基本演習/

14　関連リンク

→ 講義 **積分法の基本** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/積分法の基本-講義/

→ 講義 **微分公式と計算法** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分公式と計算法-講義/

→ 講義 **微分積分学の基本定理** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分学の基本定理-講義/

→ 講義 **微分積分の応用** lecture math calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/calculus/微分積分の応用-講義/