

Bernoulli 方程式

1 導入

このページの核心は、Bernoulli 方程式の非線型項 y^n を置換で吸収し、一階線型へ還元することである。

2 標準形

Bernoulli 方程式は
Bernoulli equation

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

である。ただし $n = 0$ なら通常の一階線型、 $n = 1$ なら $y' + (P - Q)y = 0$ の線型同次に退化する。したがって Bernoulli 置換が本質を持つのは $n \neq 0, 1$ の場合である。

3 なぜこの方針を選ぶのか

非線型項は y^n という 1 種類の次数で制御されている。そこで $u = y^{1-n}$ と置換し、非線型項の次数を吸収する。この置換により、 u に関する一階線型が得られる。

4 導出

$u = y^{1-n}$ とおくと

$$u' = (1 - n)y^{-n}y'$$

である。もとの式を y^n で割ると

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

である。したがって

$$\frac{1}{1-n}u' + P(x)u = Q(x)$$

となり、

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

を得る。これは一階線型である。

5 具体例

$$y' + y = xy^2$$

では $n = 2$ であるため、 $u = y^{-1}$ と置換する。 $u' = -y^{-2}y'$ であり、導出により

$$u' - u = -x$$

を得る。これは積分因子で処理できる一階線型である。

6 Logistic 方程式との関係

$$y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

は

$$y' - ry = -\frac{r}{K}y^2$$

と整理できるため Bernoulli 方程式の特殊例でもある。一方、自律系として平衡点と安定性を判定する方法も有効である。

7 どこまで成り立つか

Bernoulli 型は非線型方程式の一部である。非線型であるという情報だけでは解法を決定できない。 y^n が標準形に沿って出現するかを確認する必要がある。

8 Bernoulli型で割り算を行う前の確認

Bernoulli 方程式
Bernoulli equation

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

では、 y^n や y で割る変形を使うことがある。その場合は、先に $y = 0$ が元の式を満たすかを確認する。割り算で $y = 0$ の解を消す可能性があるからである。

また、 $n = 0$ の場合は一階線型に近い形になり、 $n = 1$ の場合は最初から一階線型である。したがって、 $n \neq 0, 1$ として置換を進める前に、 $n = 0$ と $n = 1$ の特殊場合を分ける。

9 演習リンク

→ 基本演習 一階微分方程式の分類と解法 [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/>一階微分方程式の分類と解法-基本演習/

10 関連リンク

→ 講義 一階線型と積分因子 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/>一階線型と積分因子-講義/

→ 講義 Logistic 方程式 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/>Logistic 方程式-講義/