

# Euler-Cauchy 型と高階方程式

## 1 導入

このページの核心は、高階線型定数係数では  $e^{rx}$ 、Euler-Cauchy 型では  $x^r$  を試行解として選択する理由を確認することである。

## 2 高階定数係数

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

では  $y = e^{rx}$  を仮定する。微分しても  $e^{rx}$  が共通因子として残るため、

$$a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

を得る。根  $r$  の重複度が  $m$  なら、

$$e^{rx}, x e^{rx}, \dots, x^{m-1} e^{rx}$$

が対応する。

## 3 Euler-Cauchy 型

Euler-Cauchy 方程式は

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0$$

のように、微分階数に対応して  $x$  の冪が掛かる方程式である。 $y = x^r$  と置くと、 $x y' = r x^r$ 、 $x^2 y'' = r(r-1)x^r$  となり、共通因子  $x^r$  が残る。したがって  $r$  の代数方程式へ還元できる。

この方針を選択する別の理由は、 $x = e^s$  という変数変換で確認できる。 $D_s = d/ds$  とすると、 $x y' = D_s y$ 、 $x^2 y'' = D_s(D_s - 1)y$  である。したがって Euler-Cauchy 型は、対数変数  $s = \log x$  では定数係数方程式へ近い形になる。 $x^r = e^{rs}$  が自然な試行解になる理由はここにある。

## 4 具体例

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

で  $y = x^r$  とおくと

$$r(r-1) + r - 1 = r^2 - 1 = 0$$

である。したがって  $r = \pm 1$  であり、 $y = C_1 x + C_2 x^{-1}$  を得る。

## 5 重根と対数因子

Euler-Cauchy 型でも、指数方程式が重根を持つ場合には独立な 2 解が不足する。この場合、定数係数で  $xe^{rx}$  が現れるのに対応して、Euler-Cauchy 型では  $x^r \log x$  が現れる。

たとえば

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

では  $y = x^r$  を代入して

$$r(r-1) - r + 1 = (r-1)^2 = 0$$

を得る。したがって

$$y = C_1 x + C_2 x \log x$$

である。  $\log x$  が出現する理由は、対数変数  $s = \log x$  で重根解  $e^s, se^s$  が生じ、それを  $x$  の変数へ戻すと  $x, x \log x$  になるためである。

## 6 高階方程式との対応

高階定数係数では、特性多項式の根が解の基本成分を決定する。相異なる根は指数関数を与え、重複根は多項式因子を伴う。この構造は、解空間の次元が階数と一致しなければならないという線型理論の要請に由来する。

## 7 どこまで成り立つか

Euler-Cauchy 型は  $x = 0$  に特異点を持つ。したがって解を扱う区間が  $x > 0$  か  $x < 0$  かを明示する必要がある。さらに一般の変数係数方程式がすべて Euler-Cauchy 型へ還元できるわけではない。また、 $x = 0$  を跨ぐ区間で同一の表示を無条件に使用してはならない。 $x^r$  や  $\log x$  の扱いは区間と実数・複素数の設定に依存する。Euler-Cauchy 型は特異点近傍の解析へ接続するため、Frobenius 法への入口としても重要である。

## 8 演習リンク

→ [基本演習 存在一意性と数値解法](#) [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/存在一意性と数値解法-基本演習/>

## 9 関連リンク

→ [講義 べき級数解法と Frobenius 法](#) [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/べき級数解法と Frobenius 法-講義/>