# Euler 法の次に何が来るか：Runge-Kutta と陰的方法の入口

## 1 導入

このページの核心は、Euler 法の欠点を精度と安定性に分解し、それぞれに対して Runge-Kutta 法と陰的方法が対応することを確認することである。

## 2 何を解くページか

対象は初期値問題

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

である。Euler 法は $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ であるが、局所情報を 1 回しか利用しないため精度が低く、剛性のある問題では安定性も不足する。

ここで精度と安定性を分離することが重要である。精度は「真の解にどれだけ近いか」を測る。安定性は「本来減衰すべき成分を、数値計算が人工的に増幅しないか」を測る。高次精度の方法でも、刻み幅が安定条件を破れば破綻する。

## 3 Runge-Kutta 法の発想

Runge-Kutta 法は、区間内の複数の傾きを評価し、それらを平均して次点を構成する。代表である 4 次 Runge-Kutta 法は

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f(t_n + h/2, y_n + hk_1/2),$$

$$k_3 = f(t_n + h/2, y_n + hk_2/2),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

で与えられる。目的は、区間の途中の傾きも反映し、Taylor 展開の高次項まで整合させることである。

## 4 陰的方法の発想

Backward Euler 法は

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

である。右辺に未知の $y_{n+1}$ が含まれるため、各段階で方程式を解く必要がある。その代わり、$y' = ay, a < 0$ のような減衰問題で安定性が強い。

この方法を選択する理由は、新しい時刻の傾きを用いることで、減衰する解の向きを数値的に尊重しやすくなるためである。代償として、線型問題では連立一次方程式、非線型問題では Newton 法などの反復解法が必要になる。

## 5 具体例

$y' = -10y$ に対して Forward Euler 法は $y_{n+1} = (1 - 10h)y_n$ である。$h = 0.3$ では倍率が $-2$ となり不安定である。一方、Backward Euler 法は

$$y_{n+1} = y_n - 10hy_{n+1}$$

より

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + 10h} y_n$$

となり、任意の $h > 0$ で減衰する。

この例では、真の解 $e^{-10t}$ は単調減衰する。Forward Euler 法で $h = 0.3$ を採用すると、倍率が $-2$ となるため、符号を反転しながら絶対値が増加する。これは微分方程式の性質ではなく、数値法が生成した人工的挙動である。

## 6 選択基準

| 状況 | 候補 | 理由 |
|---|---|---|
| 滑らかで非剛性の問題 | Runge-Kutta 法 | 少ない実装負担で高次精度を得やすい |
| 急速減衰と遅い成分が混在する剛性問題 | 陰的方法 | 安定性を確保しやすい |
| 精度検証が必要な計算 | 刻み幅の半減比較 | 誤差の減少傾向を確認できる |

## 7 どこまで成り立つか

Runge-Kutta 法は精度を改善する標準手段であるが、剛性の強い問題では刻み幅を極端に小さく要求することがある。陰的方法は安定性に強いが、各段階の非線型方程式を解く負担が増加する。

## 8 演習リンク

→ 基本演習 存在一意性と数値解法 exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/存在一意性と数値解法-基本演習/

## 9 関連リンク

→ 講義 方向場・Euler 法・誤差と安定性の入口 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/方向場・Euler 法・誤差と安定性の入口-講義/